



CEFET-MG

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS
GERAIS UNIDADE ARAXÁ**

FABIANO VELOSO FERREIRA

**SIMULAÇÃO REAL DE RUPTURA DE UM CORPO UCS
UTILIZANDO A MODELAGEM FEM-DEM**

ARAXÁ/MG

2017

FABIANO VELOSO FERREIRA

**SIMULAÇÃO REAL DE RUPTURA DE UM CORPO UCS
UTILIZANDO A MODELAGEM FEM-DEM**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia de Minas, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Minas.

Orientador: Prof. Dr. Hildor José Seer

Coorientador: Prof. Guilherme Alzamora

ARAXÁ/MG

2017

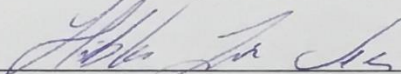
FOLHA DE APROVAÇÃO

FABIANO VELOSO FERREIRA

**SIMULAÇÃO REAL DE RUPTURA DE UM CORPO UCS
UTILIZANDO A MODELAGEM FEM-DEM**

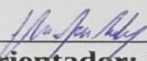
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Minas do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET/MG, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Minas.

Araxá, 23 de Junho de 2017.



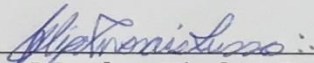
Presidente e Orientador: Dr. Hildor José Seer

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG – Unidade Araxá



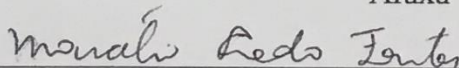
Coorientador: Me. Guilherme Alzamora

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG – Unidade Araxá



Membro Titular: Dr. Felipe de Moraes Russo

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG – Unidade Araxá



Membro Titular: Me. Marcélio Prado Fontes

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG – Unidade Araxá

DEDICATORIA

Dedico este trabalho aos meus pais,
Edson e Patrícia e a minha irmã Juliana.

“Ando devagar, mas nunca ando para trás.”

Abraham Lincoln

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família que sempre me apoiou e me ensinou a ser a pessoa que sou, me permitindo chegar até onde cheguei. Em especial a minha mãe Patrícia, ao meu pai Edson, a minha irmã Juliana e a minha tia e madrinha Valeria.

Agradeço também a todos os meus amigos, do CEFET em Araxá, da minha cidade natal Montes Claros, de Belo Horizonte e dos amigos feitos durante o intercambio nos Estados Unidos.

Ao meu grande Mestre e futuro Doutor, Professor Michel Melo Oliveira, que me apoiou, e se disponibilizou em me ajudar na realização deste trabalho.

Ao Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, por ter me recebido e ajudado na a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Dr. Hildor José Seer por ter aceitado a função de ser meu orientador.

Ao meu coorientador Professor Guilherme Alzamora, por ter aceitado a função e ter me disponibilizado seu tempo e a ajuda necessária para a realização deste trabalho.

A todos eu sou infinitamente grato...

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a aplicabilidade da modelagem numérica pelo método dos Elementos Finitos Discretos (FEM-DEM), para a simulação de um ensaio de Compressão Uniaxial (UCS) em corpos UCS. Os softwares utilizados para realizar a simulação foram o GiD em conjunto com o software de visualização gráfica MayaVi, embora o software GiD não seja apropriado para gerar simulações de materiais rochosos. Foram utilizados dados das propriedades reais de seis amostras de rocha básica intrusiva, aplicadas em ensaios UCS reais, para os dados de entrada utilizados nos materiais a serem simulados em software. O objetivo era ver o quão próximo os resultados de resistência à compressão simulados chegariam aos resultados reais. Para a análise dos resultados, foram utilizados métodos com o intuito de identificar os valores de resistência à compressão dos ensaios simulados (método da Primeira Cruz, Última Cruz, Ensaios Simulados (Interpolados) e os Valores mais Próximos). Foi observado que o melhor método de análise foi o método da Primeira Cruz, no qual a simulação que melhor representou o valor real obtido foi o valor de resistência da amostra 2 (103,15 MPa simulado, 107,11 MPa real), enquanto os outros valores simulados não chegaram perto dos valores reais. Por fim concluiu-se que a modelagem FEM-DEM é promissora, mas os softwares utilizados não foram capazes de simular ensaios em corpos UCS de forma real.

ABSTRACT

This work is about a study using a numerical modeling method called Discrete Finite Elements Method (FEM/DEM) on a simulation of a Uniaxial Compressive Strength test (UCS), to see if this method can truly simulate the real behavior of a UCS rock body during the UCS test. The software used for this work were GiD and MayaVi, although GiD is not a specific software to use when simulating a rock body. Properties data of real UCS samples of Basic Intrusive Rock specimen were used as data to apply at the simulated tests. The main goal was to see how close the results obtained by the simulation would be in comparison with the real ones. For the result analysis, methods to identify the values for compressive resistance were applied (First Cross method, Last Cross method, Interpolated method and Closest Values method). It was observed that the best analysis method was the First Cross method, the closest simulation value with the real value acquired was for the sample number 2 (103.15 MPa simulated, 107.11 MPa real), as the other values did not get closer to the real ones. By the end, it was concluded that the FEM/DEM modeling is a promising method, but the software used were not capable of simulating the UCS test in a real way.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos de Fraturas no FEM. Adaptado de: Jing (2003, p. 296).....	9
Figura 2 - Esquemática de dois corpos em contato, demonstrando a força infinitesimal devido à sobreposição. Adaptado de: Munjiza (2004)	14
Figura 3 - Curva de Tensão-Deformação em função do Endurecimento e Amolecimento. Fonte: Mahabadi et al. (2010).....	15
Figura 4 - Seção de tensão por amolecimento definido em termos de deslocamento, após Munjiza (2004). Fonte: Mahabadi et al.(2010).....	16
Figura 5 - Representação de um modelo de fratura única, após Munjiza (1999). Fonte: Mahabadi et al. (2010).....	16
Figura 6 - Geometria das plataformas e do corpo de amostra, utilizando o software GiD.	20
Figura 7 - Barra de malha do software GiD.	20
Figura 8 - Representação de uma malha gerada pelo software GiD.	21
Figura 9 - Barra de seleção de método numérico do programa GiD.	21
Figura 10 - Ferramenta de seleção de materiais do software GiD.	22
Figura 11 - Representação do Círculo de Mohr. Adaptado de: Shanmukha (2016).	24
Figura 12 - Propriedades dos materiais padrão encontrados no software GiD. (a) Propriedades da Areia, (b) Propriedades do - Microbeads, (c) Propriedades do Concreto, (d) Propriedades do Granito.	26
Figura 13 - Barra de propriedades da Rocha Intrusiva Básica preenchidos em software GiD.	27
Figura 14 - Propriedades da Rocha atribuída a geometria representativa do corpo de amostra de rocha.	27
Figura 15 - Barra de propriedades da Aço preenchidos em software GiD.....	29
Figura 16 - Propriedades do Aço atribuído a geometria representativa das plataformas de Aço.....	29
Figura 17 - Ferramenta de Condições do software GiD.....	30
Figura 18 - Valores de velocidades aplicadas as plataformas de aço.....	31
Figura 19 - Aplicação das condições as plataformas de aço.	31
Figura 20 - Ferramenta Problem Data do software GiD.	32
Figura 21 - Ferramenta Calculate do software GiD.	32
Figura 22 - Interface gráfica do software MayaVi.	33
Figura 23 - Exemplo da distribuição de tensões em uma amostra quando ocorre o rompimento (Software MayaVi).	35
Figura 24 - Faixa utilizada para aplicar a interpolação de valores para determinar o valor de resistência a compressão da rocha (Software MayaVi).	36

INDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Valores dos ensaios UCS realizados pelo Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.	19
Tabela 2 - Propriedades do Aço por Omid K. Mahabadi em seu exemplo.	28
Tabela 3 - Propriedades do Aço calculadas.	28
Tabela 4 - Propriedades da Rocha Intrusiva Básica calculadas.	34
Tabela 5 – Resistências obtidas através do método de interpolação.	36
Tabela 6 - Valores de resistência à compressão de ensaios reais de compressão uniaxial Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG.	37
Tabela 7 - Resultados de resistência a compressão dos ensaios reais e dos simulados com a interpolação dos valores da primeira cruz com a última cruz.	39
Tabela 8 - Valores simulados selecionados em comparação aos reais e suas relações (%).	42
Tabela 9 - Variação da Resistência à compressão de ensaios simulados em relação a mudança do Mass Damping Coefficient.	45

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Resistência à Compressão x Número da Amostra.	37
Gráfico 2 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os simulados analisados pelo método da primeira cruz.	38
Gráfico 3 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os simulados analisados pelo método da última cruz.	39
Gráfico 4 - Gráfico para comparação entre os dados reais e os dados simulados interpolados.	40
Gráfico 5 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os dados simulados interpolados.	41
Gráfico 6 - Gráfico para comparação entre os dados reais e os valores mais próximos simulados.	42
Gráfico 7 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os valores simulados mais próximos.	43
Gráfico 8 - Representação de todas as linhas de tendência para os valores de resistência a compressão dos ensaios reais e ensaios simulados com suas diversas formas de análises abordadas neste trabalho.	44
Gráfico 9 - Valores de resistência a compressão de ensaios UCS simulados em função dos valores de Mass Damping Coefficient.	46

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
2.1. Ensaio de Compressão Uniaxial.....	2
2.2. Modelos Numéricos em Mecânica das Rochas.....	4
2.2.1. Conceitos básicos	4
2.2.2. Métodos numéricos para modelagem contínua ou descontínua (discreto) de maciços rochosos.....	4
2.3. Método de Elementos Finitos (FEM).....	6
2.3.1. Conceitos Básicos	6
2.3.2. Análise de Fraturas Utilizando FEM.....	8
2.4. Método de Elementos Discretos (DEM)	10
2.4.1. Conceitos Gerais	10
2.4.2. Análise de Deformação Descontínua – DDA.....	12
2.5. Modelo Híbrido FEM-DEM.....	13
2.5.1. Detecção e interação de contato	13
2.5.2. Modelo de fratura	15
2.6. Softwares GiD e MayaVi	17
3. METODOLOGIA	18
3.1. Ensaio Reais de Compressão Uniaxial	18
3.2. Geração das Estruturas para Modelagem FEM-DEM Utilizando o Software GiD.....	19
3.3. Determinação das Propriedades dos Materiais e Atribuição das Propriedades aos Corpos Modelados	21
3.3.1. Definição das Propriedades da Amostra de Rocha Intrusiva Básica.....	23
3.3.2. Definição das Propriedades do Aço	27
3.4. Determinação das Condições de Processo	30
3.5. Geração e Visualização do Processo utilizando o software GiD em conjunto com o software MayaVi.....	32
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	33
4.1. Resistência à Compressão	33
4.2. Mass Damping Coefficient.....	45
5. CONCLUSÕES	46
6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

1. INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é verificar a possibilidade de simular a ruptura real de corpos UCS (Unconfined Compressive Strength), amostras de rocha adaptada para ensaio de compressão uniaxial. Onde ensaios triaxiais de laboratórios, tais como ensaio de teste de disco (BTS) e ensaio de compressão uniaxial (UCS), são efetuados para verificar a ruptura de um corpo rochoso e seu comportamento pós-ruptura. Para as simulações de ensaios de compressão uniaxial, o software de modelagem híbrida GiD em conjunto com o software MayaVi foram utilizados, baseando-se na combinação de métodos de elementos finitos-discretos (FEM-DEM).

A questão que norteia esse trabalho parte da veracidade de poder simular a ruptura real de um corpo UCS, para o ensaio de compressão uniaxial com a modelagem FEM-DEM aplicado em um software.

Levando em conta que a modelagem FEM-DEM reproduz bem a parte contínua e descontínua de corpos rochosos. Então um programa que utiliza um método de modelagem numérica híbrida de Números Finitos Discretos (FEM-DEM), com métodos bastante conhecidos para solução de problemas na área da mecânica das rochas e com uma interface gráfica considerada eficiente, é capaz de reproduzir fielmente o comportamento e fratura de um corpo rochoso submetido a determinadas condições de tensão.

A importância deste trabalho se baseia em testar softwares que possuam potencial para simular o comportamento de um corpo rochoso sob uma tensão aplicada a ele, para que essas simulações possam ajudar em uma análise de ensaios de compressão de rocha. Assim, aumentando a quantidade de informações das propriedades de corpos rochosos, permitindo uma melhor representação das características de um maciço rochoso e contribuindo para tomada de decisões para uma melhor exploração de um corpo mineral.

Este trabalho pretende testar a veracidade do software GiD em conjunto com o software MayaVi para simular o comportamento de rochas em ensaios de compressão. Com os objetivos específicos de comparar os resultados simulados com resultados de ensaios reais de compressão de rochas. Também determinar se o método híbrido FEM-DEM aplicado no software GiD é capaz de prever e reproduzir de maneira eficiente e real as fraturas em corpos rochosos, derivadas da aplicação de tensão sobre os mesmos.

E por fim concluir se os ensaios simulados se mostram verídicos a ponto de poder auxiliar e complementar a utilização dos ensaios feitos em laboratório.

O GiD é um software que pode trabalhar com métodos de modelagem numérica de números finitos discretos, contudo é um programa para a modelagem de materiais isotrópicos. Os resultados destas modelagens são comparados com os resultados de ensaios de compressão uniaxial reais.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Ensaio de Compressão Uniaxial

O ensaio de compressão uniaxial é o método mais antigo, de mais simples análise e mais utilizado na mecânica das rochas. Neste ensaio, um corpo de rocha de formato cilíndrico regular é comprimido por duas plataformas paralelas rígidas. A intenção deste ensaio é induzir uma tensão uniaxial na amostra de rocha. Através dele o módulo de Young (E) e a resistência de compressão não confinada da rocha são determinados (JAEGER, COOK & ZIMMERMAN, 2007).

A tensão axial no ensaio de compressão uniaxial é a variável independente controlada, enquanto a deformação uniaxial é a variável dependente. A deformação total da amostra no eixo onde age a força de compressão é medida através de um extensômetro, que monitora a variação da distância entre as plataformas paralelas.

Assim a deformação longitudinal (ε) é medida pela deformação relativa da amostra, equivalente a $\varepsilon = \Delta L/L$ sendo L o comprimento da amostra e ΔL a variação do seu comprimento, enquanto o módulo de Young pode ser estimado pela razão entre a tensão axial (σ) e a deformação equivalente (ε), sendo: $E = \sigma/\varepsilon$ (JAEGER *et al.*, 2007).

Segundo Jaeger *et al.* (2007), a tensão aplicada na amostra de rocha, pode ser aumentada aos poucos até que a fratura da rocha ocorra. A tensão utilizada nesse momento é chamada de limite de resistência à compressão uniaxial da rocha.

No entanto o estado de compressão uniaxial na amostra não será homogêneo, devido ao fato de existir certa influência de forças friccionais atuantes nas interfaces de contato da amostra de rocha e das plataformas compressoras. Um verdadeiro estado de

compressão uniaxial homogêneo conduziria a uma expansão lateral da amostra associado com o efeito de Poisson. Contudo essa expansão lateral é impedida pelo atrito no contato com as plataformas (JAEGER *et al.*, 2007).

A falta de homogeneidade na tensão aplicada na zona de contato da rocha com as plataformas tem consequências tanto para o cálculo de resistência à compressão, quanto ao módulo de elasticidade.

Essa restrição de atrito leva a uma concentração de tensão nas bordas da amostra que estão em contato com as plataformas de compressão, isso causa o aparecimento de fratura de cisalhamento nesse ponto. Devido a isso, não é correto afirmar que o valor do módulo de Young poderia ser estimado por $E = -\sigma L/\Delta L$ (JAEGER *et al.*, 2007).

Para solução deste problema diversos procedimentos foram criados, como aplicar extremidades cônicas para as amostras, ou como sugerido por Barnard (1964) e Murrell (1965) *apud* Jaeger *et al.* (2007), aumentar o diâmetro das extremidades da amostra em relação ao corpo da amostra para evitar o problema.

Isso torna o preparo das amostras uma tarefa mais complexa, pois a escolha do formato da amostra é cuidadosamente realizada de acordo com estudos fotoelásticos ou por análises de elementos finitos. Porém isso permite que o módulo de Young seja calculado, e também evita que fraturas de cisalhamento apareçam em pontos de concentração de tensão próximos as zonas de contato com as plataformas (JAEGER *et al.*, 2007).

Contudo, Chau (1997) *apud* Jaeger *et al.* (2007) apresenta uma solução mais próxima para o problema para quando for o caso de não haver movimento lateral da rocha na zona de contato da amostra com as plataformas. Pois o atrito neste contato é suficientemente grande. Onde a constante elástica λ foi utilizado como a taxa de variação do verdadeiro módulo de Young para expressar os resultados ao invés de utilizar o valor “aparente” $E = -\sigma L/\Delta L$.

Como esperado, quanto mais a razão de Poisson se aproxima de 0, mais próximo o fator λ chega da unidade, para amostras de comprimento maior que o diâmetro, a razão de Poisson possui valores menores que 0,3 enquanto o fator λ encontra-se em uma faixa de 0,97 a 1,0. Portanto no que diz a respeito do cálculo de E , o problema

envolvendo o atrito entre a rocha e as plataformas, não tem importância técnica (JAEGER *et al.*, 2007).

2.2. Modelos Numéricos em Mecânica das Rochas

2.2.1. Conceitos básicos

Na mecânica das rochas muitos dos problemas complexos acabam sendo simplificados para uma melhor análise, como no caso de simplificar a geometria de uma escavação para obter a sua análise de tensão. No entanto em determinadas situações é necessário um estudo mais detalhado da distribuição de tensão.

Em casos de maciços rochosos não homogêneos e de comportamentos constitutivos não-lineares, essas condições apresentam dificuldades que não podem ser solucionadas por métodos de análise convencionais. Para isso, ferramentas analíticas mais efetivas são necessárias (Brady & Brown, 2004).

Métodos computacionais para análises de tensão são ótimos procedimentos para solução destes problemas complexos. Segundo Brady e Brown (2004), alguns desses métodos são os diferenciais, onde o domínio do problema é separado em conjuntos de subdomínios ou elementos. A sua solução se envolve em aproximações numéricas de equações governantes, tais como as equações diferenciais de equilíbrio, as relações de deslocamento e deformação, e as equações de tensão e deformação.

Este processo também explora aproximações das conectividades entre elementos e continuidade de deslocamentos entre os elementos envolvidos (Brady & Brown, 2004).

2.2.2. Métodos numéricos para modelagem contínua ou descontínua (discreto) de maciços rochosos

Para Jing (2003), na modelagem numérica a utilização de modelos de números finitos e componentes bem definidas podem resolver problemas de engenharia. Através das inter-relações dos elementos de um sistema, o comportamento global do mesmo pode ser determinado.

Para um sistema discreto (não contínuo) a utilização de métodos numéricos como solução para um problema é geralmente simples. Um exemplo para um sistema discreto seria uma estrutura de viga.

Porém em outros casos a definição para determinados componentes requer uma subdivisão infinita do problema, assim podendo ser tratado apenas com o uso de uma suposição matemática de elementos infinitesimais. Isso leva à descrição do comportamento do sistema pelo uso de equações diferenciais. Estes sistemas são definidos como sistemas contínuos e possuem infinitos graus de liberdade (Jing, 2003).

A resolução de sistemas contínuos por métodos numéricos é geralmente subdividida em um número finito de elementos onde o comportamento é expresso por descrições matemáticas mais simples e de finitos graus de liberdade. Estes subdomínios (elementos) devem satisfazer tanto as equações diferenciais do problema quanto a condição contínua de suas interfaces com os elementos adjacentes (Jing, 2003).

Segundo Jing (2003), em uma hipótese contínua todo material envolvido no problema não pode ser quebrado em pedaços, onde um material originado em determinada zona não pode ter essa zona alterada ao longo de processos de deformação ou transporte. Os sistemas contínuos são referidos como um conceito macroscópico enquanto os sistemas discretos o são em uma escala microscópica.

No entanto, tratar elementos individuais em escala microscópica se torna uma prática desnecessária. Sendo assim, os elementos infinitos discretos são tratados de forma contínua. As propriedades dos elementos podem ser obtidas a partir de ensaios em laboratórios de materiais contínuos e macroscopicamente homogêneos ou de materiais heterogêneos, podendo ser fraturados ou não, que foram derivados matematicamente de processos de homogeneização. Os maciços rochosos são exemplos para estes materiais heterogêneos (Jing, 2003).

Deste modo, os conceitos de contínuo e descontínuo são utilizados de uma forma relativa e não absoluta, dependendo da escala do problema em questão. Em problemas relacionados a maciços rochosos isso se torna bastante relevante. Um bloco de rocha com grandes zonas de fraturas, que são tratadas como um dos vários componentes em um bloco, pode conter diversas fraturas menores que acabam não sendo representadas em um modelo de computador (Jing, 2003).

Conforme notado por Jing (2003), para casos equivalentes, o bloco é homogeneizado para derivar as propriedades equivalentes do bloco que são funções geométricas das fraturas contidas e as propriedades físicas da matriz de rocha intacta.

Pelo fato da massa de rocha fraturada encontrada na crosta terrestre possuir diferenças no material subjacente e de não existir soluções para as geometrias nela existentes, torna necessário a utilização de métodos numéricos, tais como os citados por Jing (2003):

Métodos Contínuos

- The Finite Different Method (FDM), (Método de Diferenças Finitas);
- The Finite Element Method (FEM), (Método de Elementos Finitos);
- The Boundary Element Method (BEM), (Método de Elementos de Fronteiras).

Métodos Descontínuos

- Discrete Element Method (DEM), (Método de Elementos Discretos);
- Discrete Fracture Network Method (DFN), (Método de Rede de Fraturas Discretas).

Modelos Híbridos (Contínuos e Descontínuos)

- FEM/BEM;
- DEM/DEM;
- FEM/DEM.

Para este trabalho o modelo utilizado foi o modelo híbrido FEM/DEM, que utiliza ambos os métodos de Elementos Finitos (FEM) e Elementos Discretos (DEM).

2.3. Método de Elementos Finitos (FEM)

2.3.1. Conceitos Básicos

O método numérico de Elementos Finitos é bastante popular na Mecânica das Rochas por possuir uma flexibilidade para tratar com materiais não homogêneos e anisotrópicos, em condições de limites complexos e em problemas funcionais. Além de conseguir lidar com modelos e fraturas de constituição complexa de uma maneira moderadamente eficiente (Jing, 2003).

Segundo Jing (2003), para uma análise utilizando o método de elementos finitos (FEM), são necessários três passos básicos: discretização do domínio, aproximação local, montagem e solução da equação matriz global.

A divisão do domínio se baseia em separar o domínio em números finitos de elementos interligados com uma geometria regular contendo um número fixo de nódulos, tal como um triângulo possuindo três nódulos. Um conceito básico da modelagem numérica FEM, é que a função u_i^e de cada elemento deve ser aproximada de forma polinomial em uma função tripla dos nódulos no sistema u_i^j . Esta função deve obedecer às funções probabilísticas de densidade:

$$u_i^e = \sum_{j=1}^M N_{ij} u_i^j \quad (1)$$

Onde N_{ij} é a matriz da interpolação das funções e M é ordem dos elementos.

Já quando utilizamos essas interpolações de funções, as funções probabilísticas de densidade são refeitas e escritas em sistemas de equações algébricas:

$$\sum_{i=1}^N [K_{ij}^e] \{u_i^e\} = \sum_{i=1}^N (f_i^e) \quad (2)$$

Onde a matriz $[K_{ij}^e]$ é a matriz coeficiente, $\{u_i^e\}$ é o vetor de valor nodal das variáveis desconhecidas e (f_i^e) é composto por termos de força do corpo e por condições de limites iniciais. Para problemas de elasticidade a matriz $[K_{ij}^e]$ é chamada de matriz de rigidez e é dada por:

$$[K_{ij}^e] = \int_{\Omega} ([B_i][N_i])^T [D_i][B_j] d\Omega \quad (3)$$

A matriz $[B]$ é a matriz de elasticidade, $[N]$ é chamada função de forma ou função de interpolação e $[D_i]$ é a matriz geométrica determinada pela relação entre deslocamento e tensão (Jing, 2003).

Conforme Jing (2003) no método de elementos finitos, a não homogeneidade do material é incorporada por diferentes tipos de propriedades de materiais atribuídos a diferentes elementos. Assim, a ordem das funções de forma em uma aresta partilhada por dois elementos deve ser a mesma para que não ocorra uma descontinuidade de deslocamento nesta borda.

Este método é bastante usado para mecânica das rochas dentre os outros métodos de modelos numéricos, pois foi o primeiro método a trazer flexibilidade suficiente para o tratamento de materiais heterogêneos, não-linearmente deformáveis, em condições de contornos complexos, tensão *in situ* e gravidade. Processos envolvendo simulações de fraturas vêm sendo desenvolvidos com a utilização do método FEM (Jing, 2003).

2.3.2. Análise de Fraturas Utilizando FEM

Seguindo o raciocínio proposto por Goodman *et al.* (1968), *apud* Jing (2003), para casos onde haja tensão de contato com deslocamentos pela/sobre as fraturas de espessura equivalente a zero (Figura 1), onde há uma reação linear de rigidez constante (normal e de cisalhamento), “elementos de junção” podem ser utilizado no método de elementos finitos (FEM) pela seguinte equação:

$$K^G u^G = f^G \quad (4)$$

Sendo K^G a matriz simétrica é definida pela rigidez normal e de cisalhamento, o comprimento dos elementos e suas orientações segundo a coordenada global do sistema. Já u^G é o vetor de deslocamento nodal dos quatro nódulos (i , j , k e l) que definem a junção do elemento (Figura 1) com o vetor f^G .

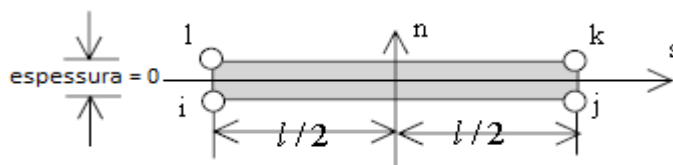


Figura 1 - Elementos de Fraturas no FEM. Adaptado de: Jing (2003, p. 296)

Essa formulação tem sido bastante implementada em códigos do FEM e na literatura da mecânica das rochas, onde era utilizada para o conhecimento do comportamento no pico e depois do pico da direção de cisalhamento. Contudo, essa proposta é baseada em casos que aberturas em larga escala, deslizamentos, e a separação completa dos elementos envolvidos estão fora de questão (Jing, 2003).

Devido ao fato de se utilizar uma espessura equivalente a zero, um mau condicionamento pode se desenvolver pela grande variação entre o comprimento e a espessura das fraturas. Sendo assim propostas para melhorar essa formulação, feitas por Zienkiewicz *et al.* (1970), Ghaboussi *et al.* (1973), Katona (1983), Desai *et al.* (1984), Gens *et al.* (1989,1995), Buczkowski e Kleiber (1997) foram citadas por Jing (2003).

Porém, de acordo com Jing (2003) os modelos de interface de elementos finitos (FEM) propostos pelos autores anteriormente citados, mesmo mostrando melhoras ainda são limitados a hipóteses envolvendo pequenos deslocamentos.

Além do problema de mau condicionamento devido à espessura das fraturas em modelos de elementos finitos, outro fator que traz dificuldades é o fato de que devido às suposições contínuas utilizadas no FEM, a rotação de blocos, a separação completa e a representação de fraturas em larga escala não podem ser tratadas utilizando o método de elementos finitos (Jing, 2003).

Para solução do problema, uma classe especial do modelo FEM foi desenvolvida. Chamada de Método de elementos finitos enriquecido, é baseado na representação direta da função objetivo, tal como os deslocamentos com descontinuidades arbitrárias e derivativas em FEM, porém sem utilizar as malhas desenvolvidas para o FEM.

A análise de fraturas é feita ao nível do elemento. A superfície das fraturas é definida pela função de distância atribuída para que a representação necessite apenas de funções de valores nodais. Onde são adicionados graus de liberdade nas funções de ensaio, uma função de salto ao longo da fratura e uma função de quebra de ponta (Jing, 2003).

Essa classe especial trouxe uma melhoria à capacidade do modelo FEM quanto a análise de fraturas junto com a vantagem do modelo em lidar com análise de materiais

heterogêneos e não lineares. Tornando o método adequado para a análise de fraturas não lineares (Jing, 2003).

2.4. Método de Elementos Discretos (DEM)

2.4.1. Conceitos Gerais

O método de Elementos discretos (DEM) é baseado na teoria da formulação e solução de equações de movimento de corpos rígidos e/ou deformáveis utilizando formulações implícitas e explícitas. Segundo Jing (2003) este é um método bastante utilizado para solução de problemas em mecânica das rochas, mecânica dos solos, análises estruturais, processamento de materiais, de materiais granulares e de mecânica dos fluidos.

O conceito utilizado em DEM, é que o domínio em questão é lidado como uma junção de blocos rígidos ou deformáveis e os contatos ao longo dos blocos possuem a necessidade de ser atualizados e identificados durante os processos de deformação e representados por modelos construtivos (Jing, 2003).

Contudo, de acordo com Jing (2003) este conceito leva a três questões:

- Identificação da topologia do bloco, em função da geometria da sua fratura ou pela suposição da forma de suas partículas;
- Formulação e solução das equações de movimento;
- Identificação e atualização dos contatos entre os blocos durante as deformações.

Assim a diferença básica entre o método DEM e os métodos contínuos, é que os contatos entre os corpos em análise estão sempre mudando com os processos de deformação e ao final deles, os contatos são fixados.

Segundo Jing (2003), as seguintes questões devem ser consideradas para se resolver um problema em mecânica das rochas usando o método DEM:

- Identificar o sistema de topologia e a subdivisão espacial do bloco;
- Representação da deformação do bloco;
- Desenvolver o algoritmo para detecção de contato;

- Obtenção de equações construtivas para os blocos e suas fraturas;
- Desenvolver a integração das equações de movimento.

Através da reconstrução do sistema de fratura *in situ* a identificação do sistema do bloco é feita, de acordo com os dados vindos de furos de perfuração e mapeamentos de sistemas de fraturas. Para isso, o procedimento tomado é estabelecer funções probabilísticas de densidade dos parâmetros de fraturas e assim usar a técnica de números aleatórios, gerando uma quantidade de sistemas de fraturas possíveis que contém as mesmas propriedades geométricas estáticas das amostras fraturadas registradas pelos furos e mapeamentos. Sendo assim, esta técnica depende muito da qualidade e quantidade de dados *in situ* adquiridos.

Jing (2003) define que o próximo passo então, é construir o sistema do bloco baseado pelo sistema de fratura. Se as fraturas forem grandes e seguirem padrões de distribuição regular, a tarefa se mostra simples. Em casos de fraturas de tamanhos finitos e sem seguir um padrão do seu sistema, combinações especiais de topologia são utilizadas.

Para blocos rígidos, a sua análise é feita utilizando uma abordagem pelo Método de Diferenças Finitas (FDM), enquanto estratégias diferentes são usadas para os blocos deformáveis. Pode-se usar estratégias com soluções explícitas de discretização de volumes finitos do interior dos blocos ou outras similares ao método FEM que utiliza a solução implícita com discretização de elementos finitos usando uma matriz de equação para representar a deformação do bloco (Jing, 2003).

Devido ao tema envolvido neste trabalho, focou-se nas estratégias de solução implícita similares ao método de elementos finitos (FEM). Conforme escrito por Jing (2003), o método de elementos discretos (DEM) implícito foi primeiramente representado pela Análise de Deformação Descontínua (DDA), que utiliza o padrão de malhas do FEM sobre os blocos. Nos contatos é utilizado o método de penalidade que, desenvolvido em conjunto com o método FEM, forma um método híbrido FEM-DEM, o qual será abordado no tópico seguinte.

2.4.2. Análise de Deformação Descontínua – DDA

Entretanto a abordagem DDA é de principal utilização em termos de desenvolvimento e aplicação e possui duas vantagens quanto às estratégias explícitas. Pode ser utilizado para casos onde são necessários maiores etapas de tempo e para cálculos das integrais para as matrizes de rigidez dos elementos (Jing, 2003).

O método FEM utiliza uma equação para descrever o movimento de um bloco. Essa equação é produzida pela minimização da energia envolvida no sistema, onde segundo a Segunda Lei da Termodinâmica, um sistema mecânico sobre o efeito de uma carga deve se movimentar ou sofrer deformação na direção onde é produzida a energia mínima total do sistema (Jing, 2003).

Segundo Jing (2003) em um sistema de um bloco a energia total envolvida corresponde a energia potencial gerada por carregamentos externos, deformações, energia irreversível dissipada, energia cinética, e de tensão. Para um sistema contendo N blocos, com m_i nódulos e cada nódulo com duas variáveis de deslocamento ortogonal u e v , a minimização de energia irá resultar em equações simultâneas:

$$[K]\{D\} - \{F\} \quad (5)$$

Onde $\{D\}$ é o vetor de variáveis de deslocamento $\{F\}$ é o vetor das forças resultantes no bloco, a matriz $[K]$ é chamada de matriz de rigidez.

Jing (2003) afirma que existem vantagens do DDA sobre os métodos DEM explícitos:

- A condição de equilíbrio pode ser facilmente satisfeita sem a necessidade de utilizar interações cíclicas na solução de problemas quase estáticos;
- O tempo de cada etapa pode ser maior sem trazer uma instabilidade numérica;
- Não possui a necessidade de utilizar técnicas quadráticas Gaussianas para realizar integrações de elementos de blocos e matriz rigidez;
- Códigos FEM podem ser facilmente convertidos em códigos DDA. Contudo, a equações de matriz devem ser criadas e solucionadas utilizando técnicas FEM.

As vantagens do método DDA não podem ser obtidas por métodos contínuos ou por técnicas do método DEM explícitas, tornando o método bastante utilizado para soluções de problemas geomecânicos. Suas aplicações variam, sendo para processos de fratura e fragmentação, cavernas, formação de túneis e efeitos de terremotos (Jing, 2003).

2.5. Modelo Híbrido FEM-DEM

Segundo o trabalho de Mahabadi, Cottrell e Grasselli (2010), a simulação de um método híbrido utilizando os métodos de elementos finitos (FEM) e elementos discretos (DEM) abrange um grande número de corpos interagindo entre si. Quando associados a uma rede de elementos finitos, onde as redes, ou malhas, definem o formato dos corpos de elementos discretos junto com os seus limites, contatos e suas deformações. As deformações contínuas são modeladas pelos elementos finitos (FEM), enquanto o comportamento descontínuo é regido pelos elementos discretos (DEM).

Para garantir um modelamento eficiente, um controle de contato de impacto tem que ser feito, para que não ocorra uma sobreposição de corpos durante o modelamento. Para isso dois tipos de processos utilizando algoritmos são levados em conta, a detecção de contato e a interação de contato (Mahabadi *et al.*, 2010).

2.5.1. Detecção e interação de contato

A detecção de contatos envolve um algoritmo que detecta todos os possíveis contatos entre corpos e descarta os corpos que estão muito longes para haver um contato. Já a interação de contato define o comportamento de um sistema formado por um grande número de elementos distintos em interação.

Conforme contatos entre corpos são detectados, o algoritmo de interação de contato entra em ação para calcular as forças entre os corpos não-contínuos. Assim uma função potencial é utilizada devido à hipótese de que os corpos em contato tendem a penetrar um ao outro, gerando forças de contato distribuídas. Sendo assim a função de contato é dada por:

$$U_c = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} p(r_t - r_c)^T (r_t - r_c) d\Gamma \quad (6)$$

Onde p é o termo de penalidade, Γ_c é o limite do elemento em contato, r_c e r_t a posição dos vetores dos pontos caindo nos elementos de contato e elemento alvo, respectivamente. Conforme a Figura 2, uma força de contato é criada através da sobreposição dos corpos em contato, de acordo com o seu formato e da sua sobreposição ocorrida.

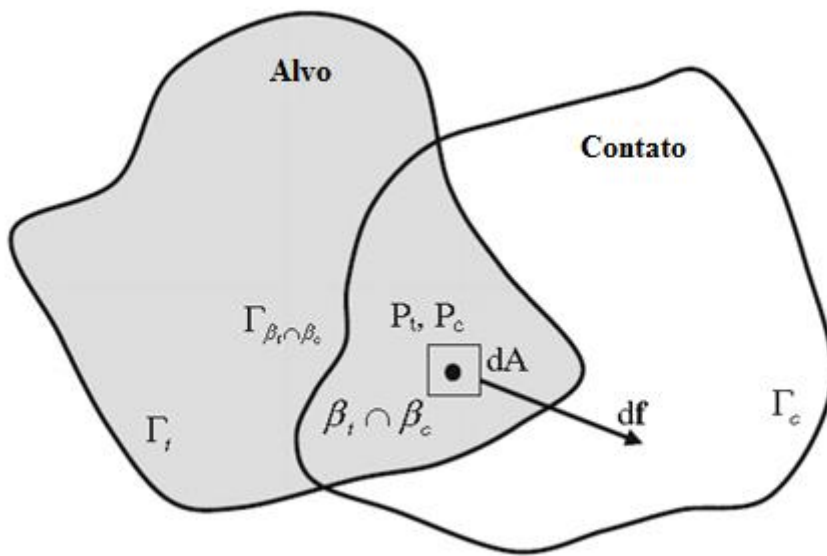


Figura 2 - Esquemática de dois corpos em contato, demonstrando a força infinitesimal devido à sobreposição. Adaptado de: Munjiza (2004)

Enquanto um corpo vai penetrando uma área de dA no outro corpo, a força de contato df vai sendo gerada.

$$df = [\text{grad}\varphi_c(P_c) - \text{grad}\varphi_t(P_t)]dA \quad (7)$$

Onde P_c e P_t são pontos de sobreposição do elemento de contato e do elemento alvo, respectivamente. Enquanto φ corresponde a função potencial.

A fórmula da função potencial, nos mostra que para qualquer ponto de penetração do elemento de contato com o elemento alvo, o trabalho realizado apenas depende do ponto final (A e B) e não do caminho feito pela penetração.

$$\varphi_t(A) = \varphi_t(B) \quad (8)$$

$$\varphi_c(A) = \varphi_c(B) \quad (9)$$

No entanto, se as potências forem consideradas constantes nos limites de ambos os elementos, o balanço de energia é preservado independente do termo de penalidade, forma dos elementos e magnitude da penetração (Mahabadi *et al.*, 2010).

2.5.2. Modelo de fratura

Para representação de fraturas, um modelo combinado único, chamado de fratura discreta, foi implantado no código FEM-DEM, onde durante os processos de fratura e fragmentação é feita a transição da modelagem contínua para descontínua. Neste modelo, uma curva de tensão-deformação é separada por duas seções como representado na Figura 3:

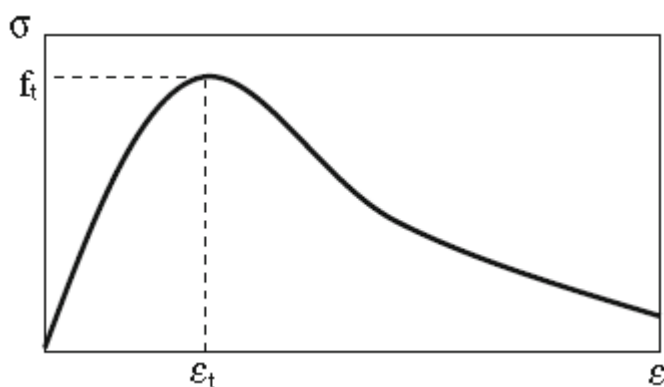


Figura 3 - Curva de Tensão-Deformação em função do Endurecimento e Amolecimento. Fonte: Mahabadi *et al.* (2010).

Conforme a Figura 3, uma seção é a de deformação de endurecimento, antes de atingir o valor da tensão de pico (f_t). E a segunda é a de deformação de amolecimento, onde conforme a deformação aumenta a tensão diminui. Porém há problemas na localização das deformações, perda da forma elíptica das equações governantes e sensibilidade ao tamanho e a orientação da malha (Mahabadi *et al.*, 2010).

Conforme citado por Mahabadi *et al.* (2010), pela formulação feita por Munjiza (2004) sobre a seção de deformação de amolecimento em termos de tensão e deslocamento, a formulação se mostrou eficiente para resolver os problemas anteriormente citados conforme mostra a Figura 4.

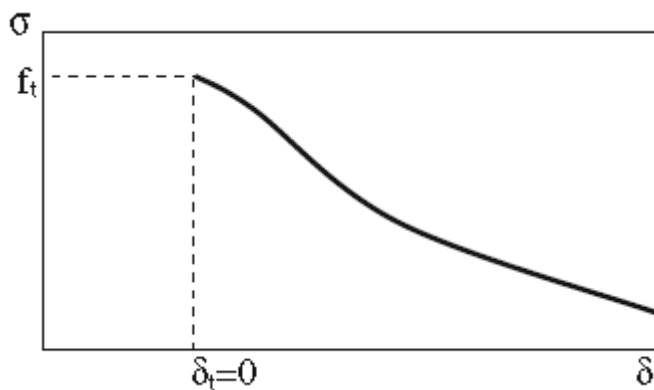


Figura 4 - Seção de tensão por amolecimento definido em termos de deslocamento, após Munjiza (2004).
Fonte: Mahabadi et al.(2010).

Onde δ é o deslocamento da fratura e a área abaixo da curva de tensão por deslocamento representa a taxa de liberação de energia.

A relação entre o deslocamento e a tensão de amolecimento é dada por uma modelagem de fratura única (Figura 5). Para quando o tamanho do deslocamento é igual a zero a força de ligação será igual à resistência à tração da rocha (f_t), dando assim o início do deslocamento apenas depois que a resistência à tração é alcançada.

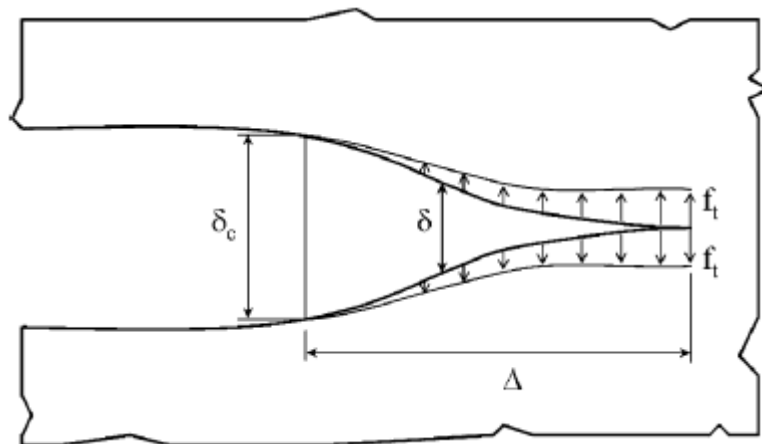


Figura 5 - Representação de um modelo de fratura única, após Munjiza (1999). Fonte: Mahabadi et al. (2010).

Assim, quando o deslocamento aumenta ($\delta > \delta_c$), a força de ligação irá decrescer e quando o deslocamento (δ) for igual ao deslocamento do corpo de contato (δ_c), a força de ligação irá à zero. Sendo assim, a força de ligação para um deslocamento (δ) menor

que o deslocamento do corpo de contato (δ_c) e maior que o deslocamento do corpo alvo (δ_t) é expressada por uma resistência à tração escalonada:

$$\sigma - z f_t \quad (10)$$

Onde z é a função escalar que representa as curvas experimentais de tensão por deslocamento. (Evans e Marathe, 1968, *apud* Mahabadi *et al.*, 2010).

2.6. Softwares GiD e MayaVi

MayaVi é um software gratuito criado com o intuito de ser uma interface gráfica para a visualização de dados Computacionais de Dinâmica de Fluidos (*Computational Fluid Dynamics* - CFD). É uma ferramenta desenvolvida por Prabhu Ramachandran que utiliza o *Visualization Toolkit* (VTK) para facilitar visualização de problemas em CFD.

Segundo Ramachandran (2001), VTK é uma biblioteca de visualização escrita em C++ e também é ligada a outras linguagens de programação. Possui características favoráveis para CFD, tal como visualizar malhas retilíneas, estruturadas, não estruturadas ou poligonais, e também dados escalares, vetoriais e de tensões.

Contudo o MayaVi é um programa escrito na linguagem Python e de acordo com Ramachandran (2001), o motivo de se utilizar essa linguagem foi devido a simplicidade para aprender o seu uso. É uma linguagem suportada em vários sistemas operacionais, possui uma grande quantidade de módulos que permitem a realização de tarefas, tal como a geração de aplicações gráficas. Por fim é uma linguagem que permite utilizar de maneira relativamente fácil uma interface em C/C++, tal como o VTK.

Conforme descrito por Ramachandran (2001), o programa MayaVi possui as seguintes características:

- É uma interface gráfica de fácil utilização;
- Suporta dados em VTK;
- Permite a customização de tabelas, facilitando a visualização;
- Módulos úteis na geração de malhas para visualização vetorial e escalar;
- Permite a visualização de múltiplos módulos ao mesmo tempo;
- Pode ser utilizado em Linux e Windows;

- Visualiza estruturas de malhas em 3D e 2D;
- Visualiza malhas estruturadas com dados escalares, como também contornos e gradientes de cores.

O software GiD é um programa desenvolvido pelo International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) utilizado para simulações numéricas. Neste software é possível gerar malhas, definir materiais e suas propriedades em modelos geométricos, e também definir condições para simulação de problemas.

O GiD pode trabalhar com geração problemas em FEM-DEM 2D e 3D. Isso é possível caso os códigos da modelagem FEM-DEM sejam inseridos na pasta de configuração do GiD. Estes códigos são adquiridos através do download do software Mayavi.

3. METODOLOGIA

Para este trabalho a metodologia a ser desenvolvida foi baseada na utilização em conjunto de dois softwares, o GiD e o MayaVi. Onde os valores das propriedades medidas de amostras de uma rocha intrusiva básica, proveniente do Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, são utilizadas para a simulação de ensaios de compressão uniaxial (UCS).

3.1. Ensaios Reais de Compressão Uniaxial

A aquisição dos valores das propriedades das amostras de rocha intrusiva básica, medidas das dimensões, massa e ensaios de compressão uniaxial (UCS) foram realizadas em laboratório da Universidade Federal de Minas Gerais, para 06 amostras de rocha intrusiva básica.

Pelas medidas de altura e diâmetro das amostras, junto com seus valores de massa, a densidade de cada amostra foi adquirida. Com os ensaios UCS permitiu-se medir os valores de resistência à compressão para cada corpo de amostra e com a

utilização de métodos lineares os valores do Módulo de Elasticidade (E) e o Coeficiente de Poisson (ν) foram calculados.

3.2. Geração das Estruturas para Modelagem FEM-DEM Utilizando o Software GiD

Neste trabalho, o GiD foi utilizado na geração das geometrias das estruturas em duas dimensões (2D), sendo as estruturas compostas pelos corpos das amostras e das plataformas de aço, as quais simulam as plataformas que exercem a compressão da rocha em um ensaio UCS (Figura 6). Para cada ensaio foram variadas as dimensões de altura e diâmetro de cada amostra de rocha, de acordo com os dados gerados no Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores dos ensaios UCS realizados pelo Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.

Amostra	Densidade (Kg/m³)	Altura (mm)	Diâmetro (mm)	Resistência (MPa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson
1	2474.50	122.80	47.20	85.53	46.20	0.173
2	2471.49	119.60	47.70	107.11	67.26	0.173
3	2416.04	121.90	47.20	71.23	51.24	0.190
4	2380.36	123.30	47.45	118.71	64.33	0.148
5	2468.77	119.50	47.25	59.86	31.71	0.192
6	2397.93	120.35	47.20	110.1	73.06	0.165
Média	2434.85	121.24	47.33	92.09	55.63	0.174

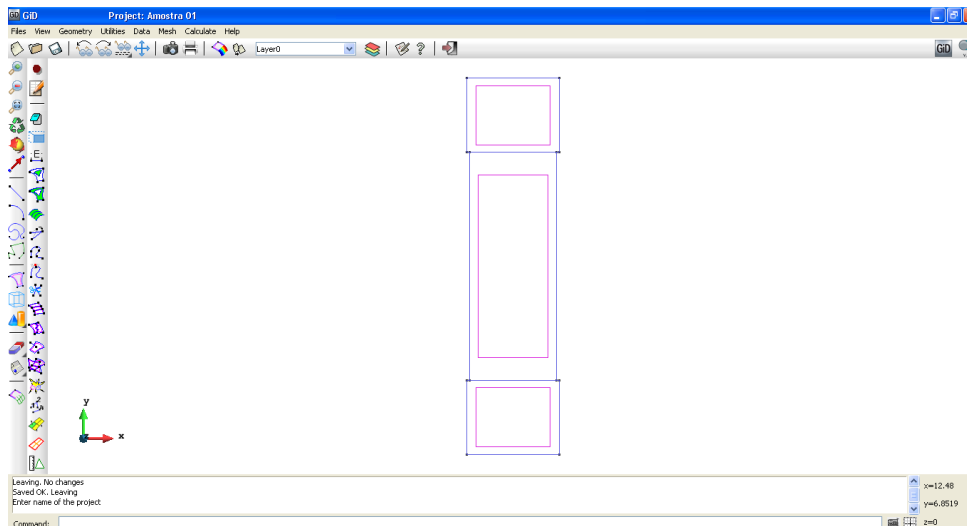


Figura 6 - Geometria das plataformas e do corpo de amostra, utilizando o software GiD.

Após serem geradas as geometrias das estruturas, foram definidas as malhas dos corpos geométricos, a malha é constituída de elementos regulares em formas triangulares de tamanho equivalentes a 0,1 cm. O tamanho dos elementos escolhido se deve em função de um tamanho pequeno o suficiente para poder gerar uma maior quantidade de elementos na malha. A Figura 7 mostra a ferramenta de geração de malhas e a Figura 8 mostra a malha já aplicada em um modelo de amostra + plataformas de aço.

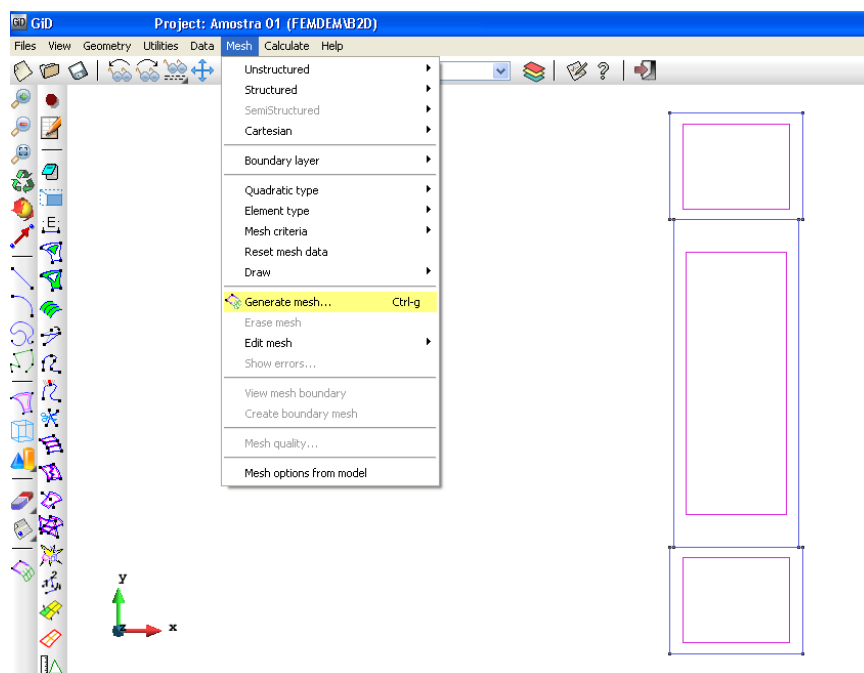


Figura 7 - Barra de malha do software GiD.

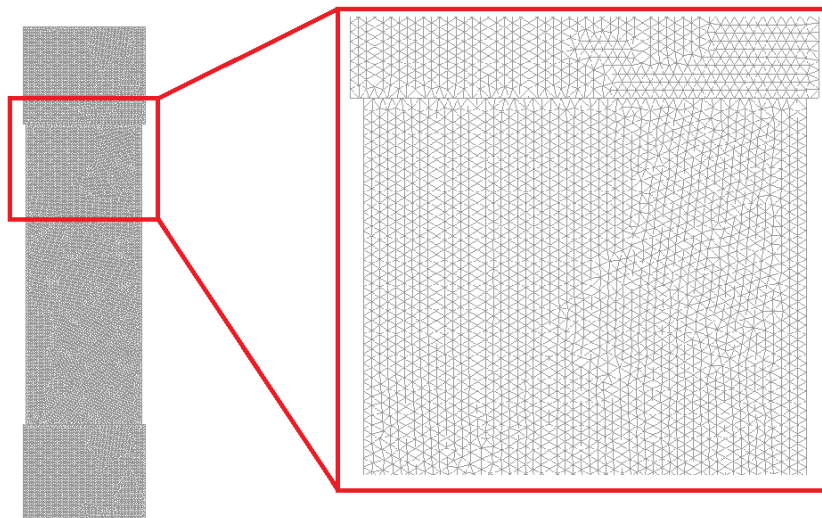


Figura 8 - Representação de uma malha gerada pelo software GiD.

3.3. Determinação das Propriedades dos Materiais e Atribuição das Propriedades aos Corpos Modelados

Concluídas as atribuições de malhas aos corpos gerados pelo software GiD, o próximo passo foi selecionar o tipo de método numérico a ser utilizado para realizar a modelagem, o método de modelagem híbrida de Elementos Finitos Discretos (FEM-DEM). Utilizando a ferramenta do GiD Data/Problem type (Figura 9), o método numérico pode ser selecionado.

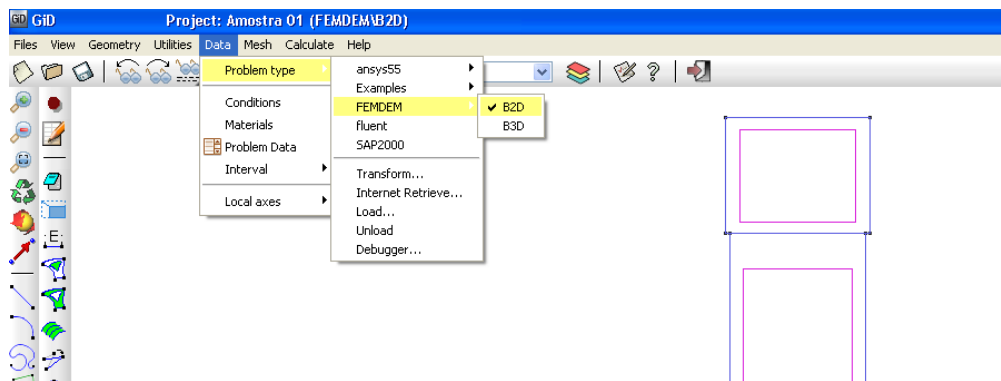


Figura 9 - Barra de seleção de método numérico do programa GiD.

Em seguida, após selecionado o método numérico FEMDEM – B2D no GiD, a ferramenta Data/Materials foi utilizada para atribuir características de determinados materiais aos elementos, assim podendo atribuir as devidas propriedades aos corpos geométricos que representam a amostra da rocha intrusiva básica e os corpos geométricos que representam as plataformas de aço.

No software GiD, para um modelamento utilizando o método híbrido FEM-DEM é necessário que os materiais atribuídos apresentem as seguintes propriedades, conforme a Figura 10.

- Densidade (Density);
- A Constante elástica λ ;
- A Constante elástica μ ;
- Mass Damping Coefficient;
- Penalty Number;
- Coeficiente de Atrito (Friction Coefficient);
- Energy Release Rate;
- Tensão de Tração (Tensile Strength);
- Tensão de Cisalhamento (Shear Strength).

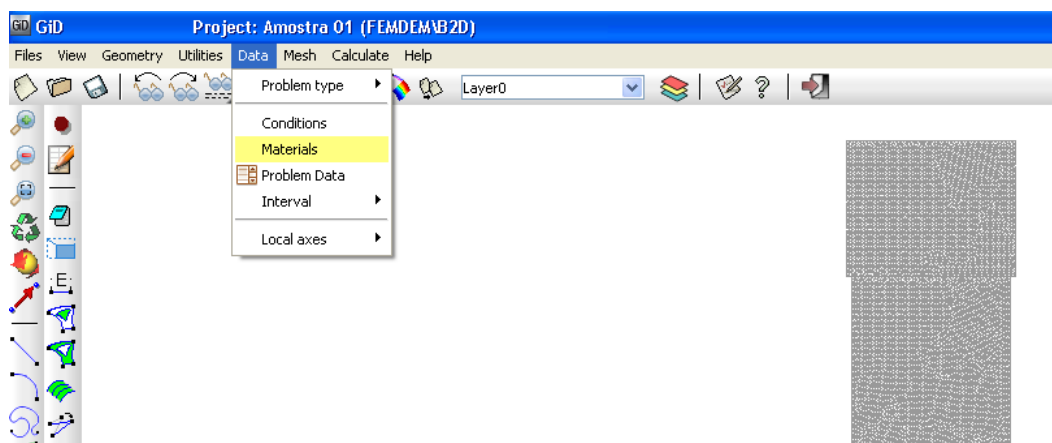


Figura 10 - Ferramenta de seleção de materiais do software GiD.

O software já possui materiais como o concreto e o granito com as suas respectivas propriedades salvas no programa, contudo não se encontram registradas as propriedades para o Aço e para a rocha intrusiva básica, materiais que serão utilizados para simulação. Assim, utilizando a ferramenta para inserir novos materiais, as propriedades para cada um dos materiais (Aço e amostra de rocha intrusiva básica)

foram calculadas e inseridas nos espaços destinados aos valores das propriedades para os materiais no software GiD.

Os cálculos para cada material foram realizados da seguinte forma:

3.3.1. Definição das Propriedades da Amostra de Rocha Intrusiva Básica

Para as propriedades da amostra de rocha, os valores inseridos foram adquiridos com base nos valores adquiridos pelos ensaios do Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Estes valores estão representados pela Tabela 1.

A partir da Tabela 1 os valores para serem inseridos como a Constante Elástica λ , Constante Elástica μ , Penalty Number, Tensile Strength, Shear Strength, Friction Coefficient e Energy Release Rate foram calculados e estipulados.

- Constante Elástica λ :

A constante elástica λ foi calculada através da utilização da seguinte equação, com os valores da Tabela 1 do Modulo de Elasticidade (E) e do Coeficiente de Poisson (ν).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

- Constante Elástica μ :

Para a determinação da constante elástica μ , foram usados os valores do Modulo de Elasticidade (E) e do Coeficiente de Poisson (ν) na Tabela 1 com a seguinte equação:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Penalty Number:

O valor a ser aplicado para o Penalty Number foi definido como um valor 10 vezes os valores de Módulo de Elasticidade de cada material. Esta propriedade tem a função de impedir que os elementos se atravessem quando houver colisão entre eles, permitindo assim a simulação do contato entre elementos de corpos distintos.

- Tensile Strength (Tensão de Tração):

Equivalente a 10% dos valores de Resistência a Compressão de rocha encontrados na Tabela 1.

- Shear Strength (Tensão de Cisalhamento):

Os valores para esta propriedade foram calculados através da utilização do círculo de Mohr-Coulomb (Figura 11) utilizando os valores de tensões principais aplicadas na rocha.

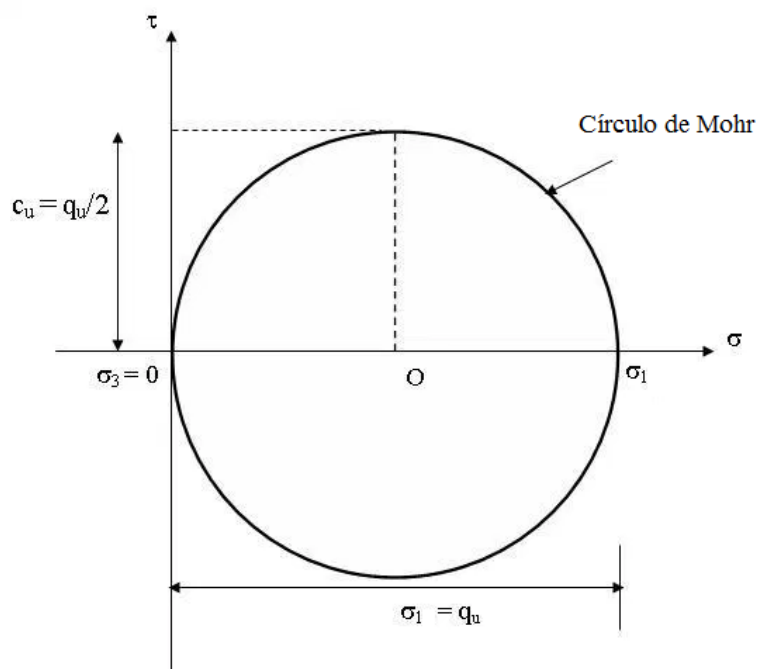


Figura 11 - Representação do Círculo de Mohr. Adaptado de: Shanmukha (2016).

Onde q_u representa a resistência à compressão, c_u a tensão cisalhante, σ_1 maior tensão e σ_3 menor tensão principal.

- Friction Coefficient (Coeficiente de Atrito):

Para o coeficiente de atrito, foram utilizados valores de 40° para os valores de ângulos de atrito das amostras, assim o coeficiente de atrito pode ser calculado pela tangente do ângulo de atrito.

- Energy Release Rate (G):

É considerado como sendo a energia utilizada para deformar em uma unidade de área uma descontinuidade. Esta propriedade foi calculada através da equação:

$$G = \frac{KIC^2 * (1 - \nu^2)}{E}$$

Onde KIC é um valor constante que pode ser considerado equivalente a 1 (KIC = 1) em casos do material ser uma amostra.

- Mass Damping Coefficient:

Os valores para Mass Damping Coefficient assim como no caso para o Aço, não foram possíveis de se estimar. Para esta propriedade foi observado, ao se comparar os valores para os materiais salvos do programa, que para materiais pouco consolidados como a areia e (*Microbeads*), seus valores de Mass Damping Coefficient são diferentes de zero Figura 12(a) e (b). Enquanto para materiais mais consolidados como o Concreto e o Granito, o programa já considera seus valores de Mass Damping Coefficient equivalentes a zero como representado na Figura 12(c) e (d).

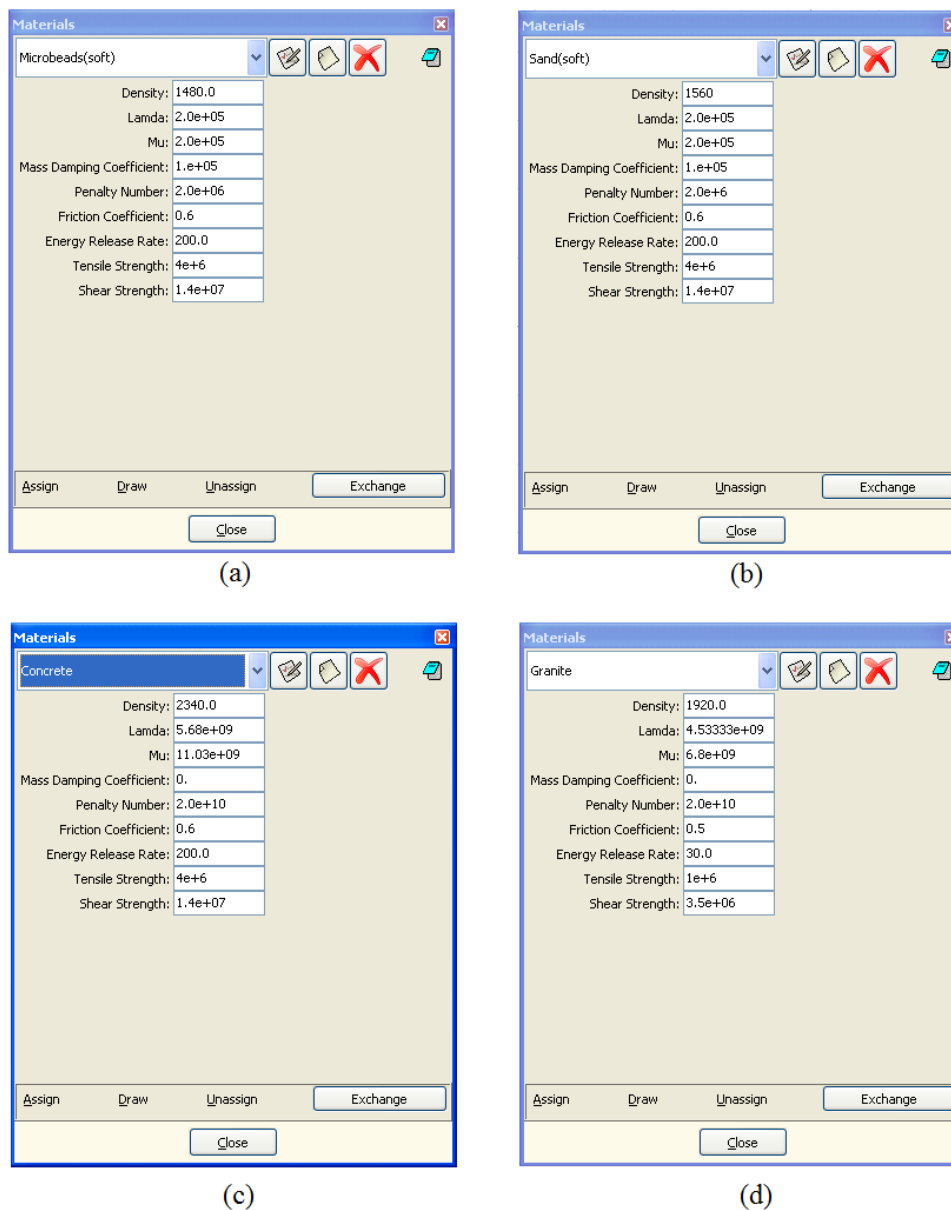


Figura 12 - Propriedades dos materiais padrão encontrados no software GiD. (a) Propriedades da Areia, (b) Propriedades do - Microbeads, (c) Propriedades do Concreto, (d) Propriedades do Granito.

Para a simulação, foi escolhido variar estes valores de forma que permitisse observar variações nos resultados das simulações.

Após os cálculos descritos acima, foram inseridas as propriedades e seus respectivos valores estimados e calculados na aba de materiais do programa (Figura 13). Assim pôde-se seguir a diante e atribuir os materiais às formas geométricas previamente criadas, onde para as plataformas foram atribuídas as propriedades do Aço e para o corpo da amostra de rocha foram atribuídas as propriedades da Rocha Intrusiva Básica (Figura 14).

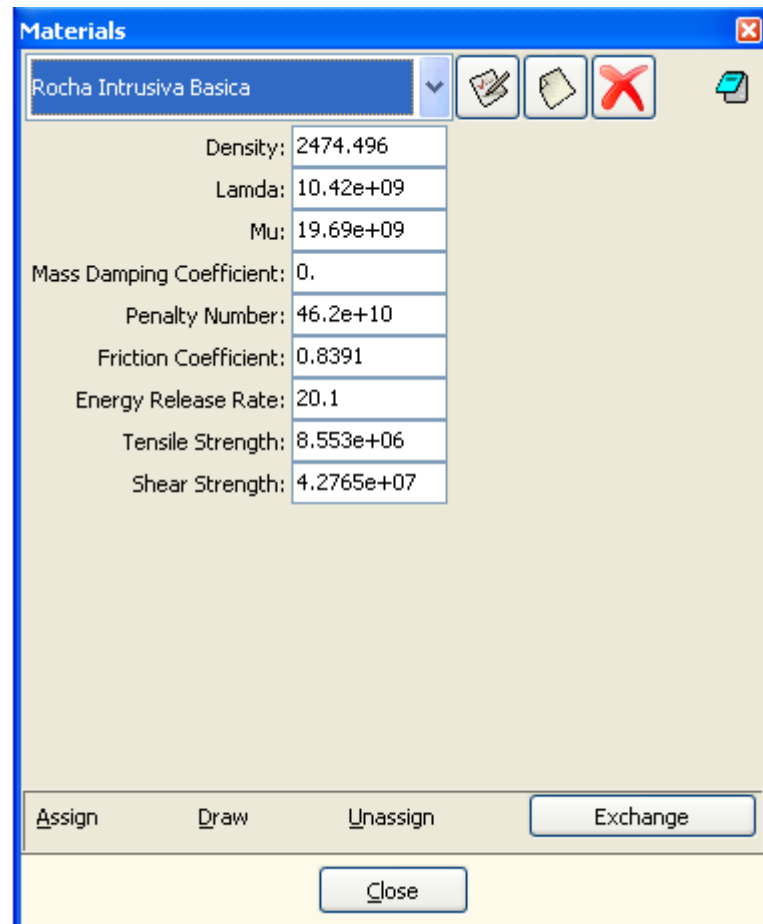


Figura 13 - Barra de propriedades da Rocha Intrusiva Básica preenchidos em software GiD.

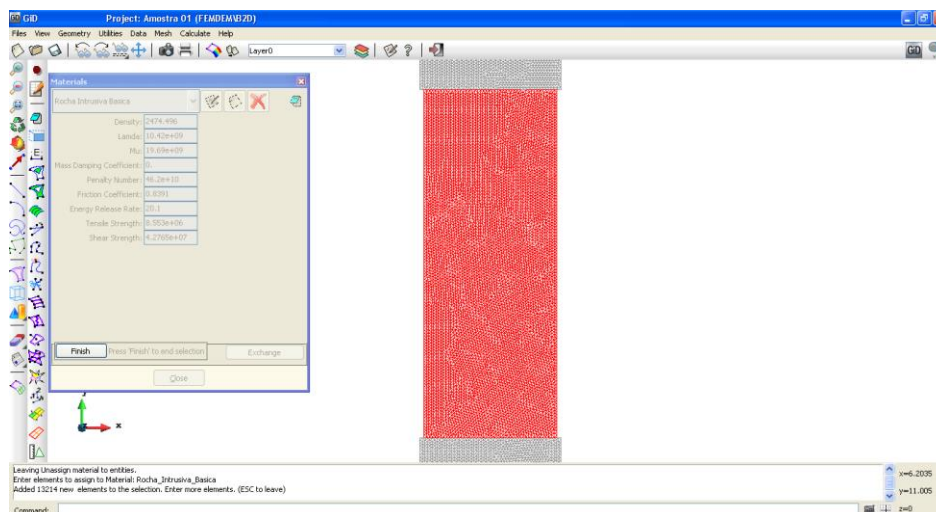


Figura 14 - Propriedades da Rocha atribuída a geometria representativa do corpo de amostra de rocha.

3.3.2. Definição das Propriedades do Aço

Para o Aço, os valores medidos foram baseados em uma representação dada pelo autor Omid K. Mahabadi (2012), para uma simulação utilizando o método FEM-DEM Tabela 2. Onde para algumas propriedades como, a Constante Elástica λ , Constante Elástica μ , Penalty Number e Energy Release Rate foram utilizados os mesmos métodos de determinação de valores utilizados para determinação destas propriedades da rocha.

Tabela 2 - Propriedades do Aço por Omid K. Mahabadi em seu exemplo.

Aço	
Densidade Kg/m³	8030
Coefficiente de Atrito	0.1
Módulo de Elasticidade (GPa)	191
Coefficiente de Poisson	0.29
Tensão de Tração (MPa)	4.0
Tensão de Cisalhamento (MPa)	14.0

Contudo para o Coeficiente de Atrito (Friction Coefficient), foi adotado um valor de 0,1 para que no momento de representar o contato entre as plataformas de aço e a amostra de rocha, o atrito entre o aço e a rocha não seria grande o suficiente para interferir no resultado da simulação.

Feito isso, os valores das propriedades do aço Tabela 3 foram inseridos no GiD Figura 15, criando o material aço ao programa e aplicando este material com suas propriedades às geometrias representantes das plataformas Figura 16

Tabela 3 - Propriedades do Aço calculadas.

Aço	
λ (10⁹)	102.23
μ (10⁹)	74.03
Penalty Number [10x]	1910
Energy Release Rate (MN/m)	4.80E-06

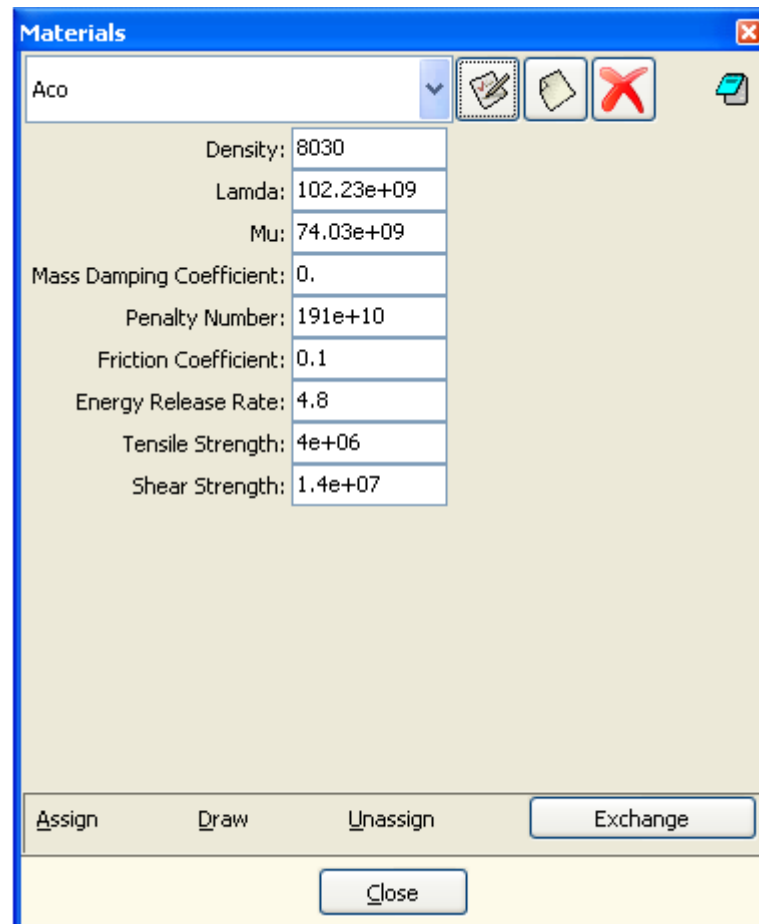


Figura 15 - Barra de propriedades da Aço preenchidos em software GiD.

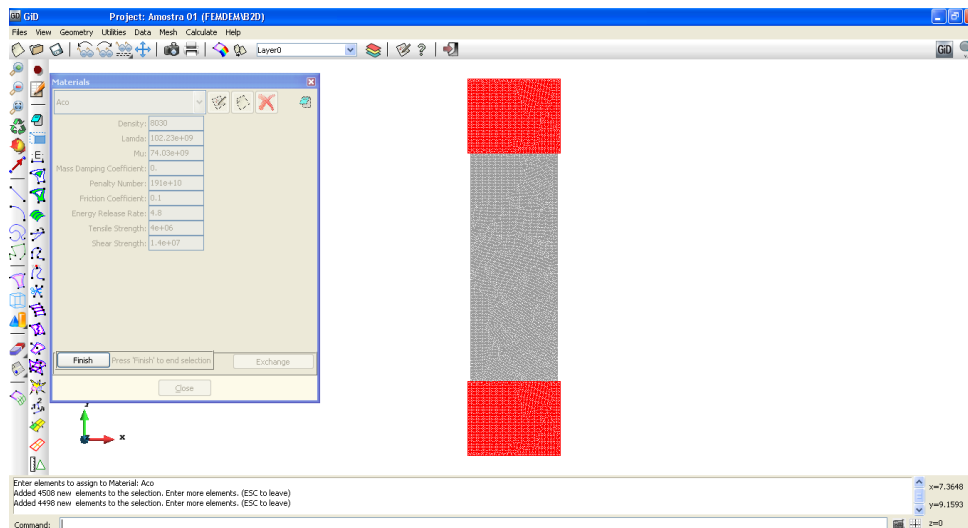


Figura 16 - Propriedades do Aço atribuído a geometria representativa das plataformas de Aço.

3.4. Determinação das Condições de Processo

Após serem geradas as geometrias dos corpos, determinados e aplicados os materiais dos corpos e suas propriedades o próximo passo foi gerar as condições de processo, atribuindo movimento às plataformas de aço para que ensaios de compressão uniaxial fossem representados.

Para isso, utilizando a ferramenta “*Conditions*” (Figura 17) as velocidades das plataformas foram inseridas no programa GiD. Onde as velocidades adotadas foram equivalentes a 100 unidades que o programa utiliza (O GiD não informa a unidade utilizada para representar a velocidade, onde se assume utilizar unidades do Sistema Internacional) para o eixo y que representa o eixo onde será induzida a tensão de compressão na amostra.

O motivo de se utilizar um valor tão alto para representar a velocidade das plataformas se dá pelo intuito de conseguir apenas visualizar o comportamento da amostra durante o ensaio. Para a plataforma superior este valor foi negativo para poder representar um movimento descendente da plataforma, para a plataforma inferior o mesmo valor foi adotado porém com sinal positivo representando movimento ascendente, como é observado pela Figura 18.

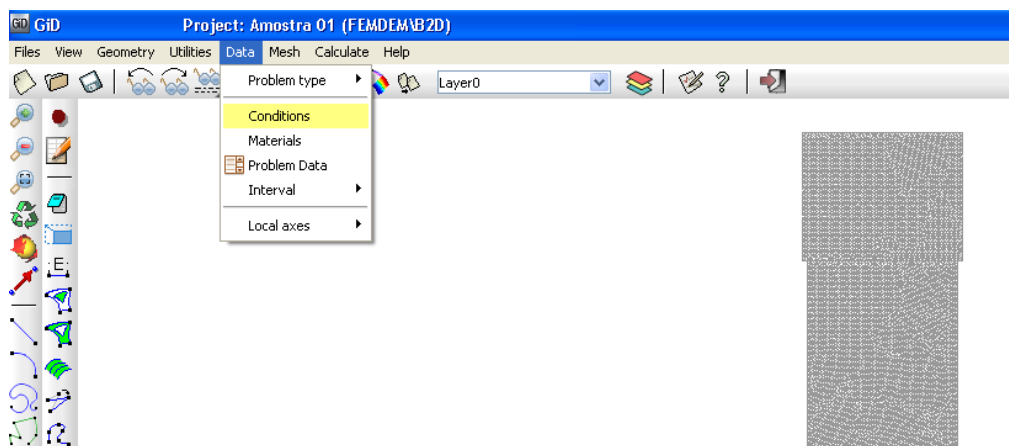


Figura 17 - Ferramenta de Condições do software GiD.

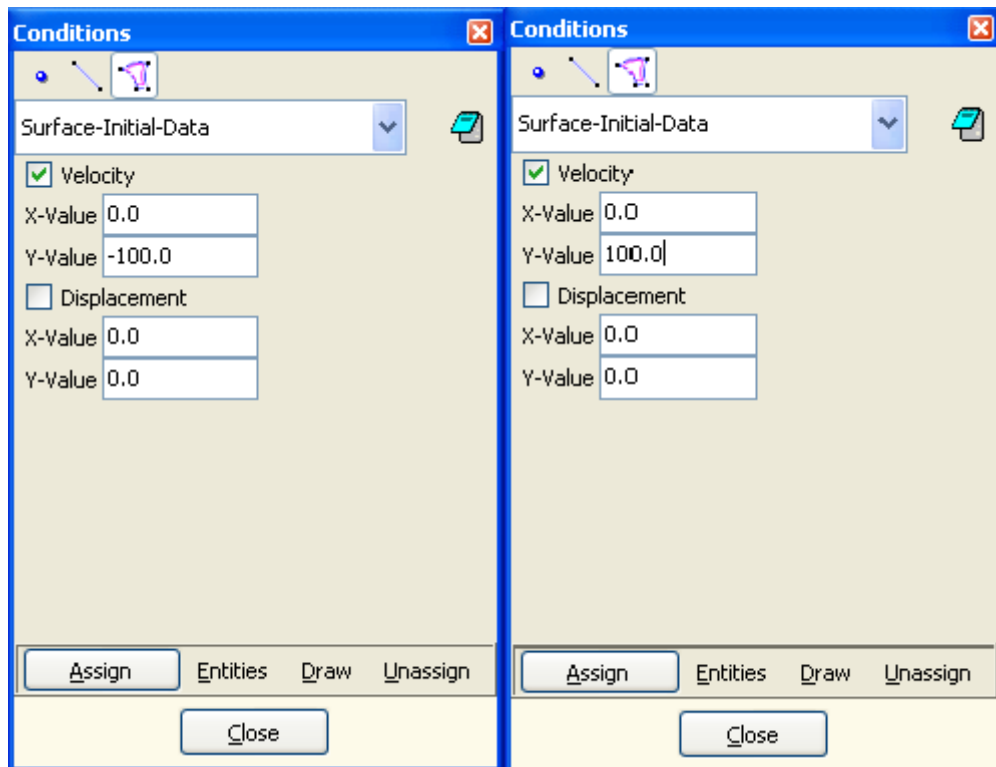


Figura 18 - Valores de velocidades aplicadas as plataformas de aço.

Inseridos os valores, as condições foram aplicadas nas superfícies que representavam as plataformas (Figura 19). Por fim, foi possível gerar a condição de movimento para o processo de simulação de um ensaio UCS, onde o movimento descendente da plataforma superior junto com o movimento ascendente da plataforma inferior proporcionaram a representação da compressão da amostra.

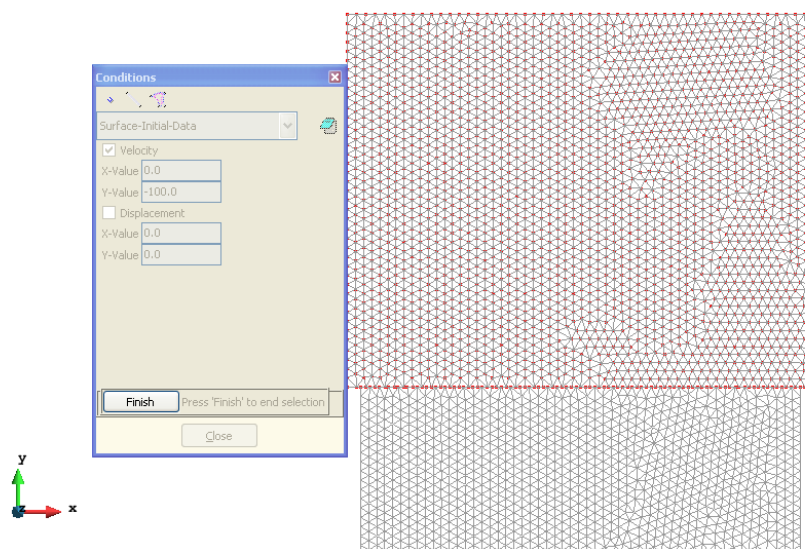


Figura 19 - Aplicação das condições as plataformas de aço.

3.5. Geração e Visualização do Processo utilizando o software GiD em conjunto com o software MayaVi.

Após serem aplicadas as condições do processo de modelamento, os dados para gerar o problema foram configurados através da ferramenta *Problem Data* (Figura 20). Em seguida, a partir do programa GiD com a ferramenta “*Calculate*” (Figura 21) todos os dados aplicados são utilizados para o cálculo do processo e o arquivo de formato Y gerado.

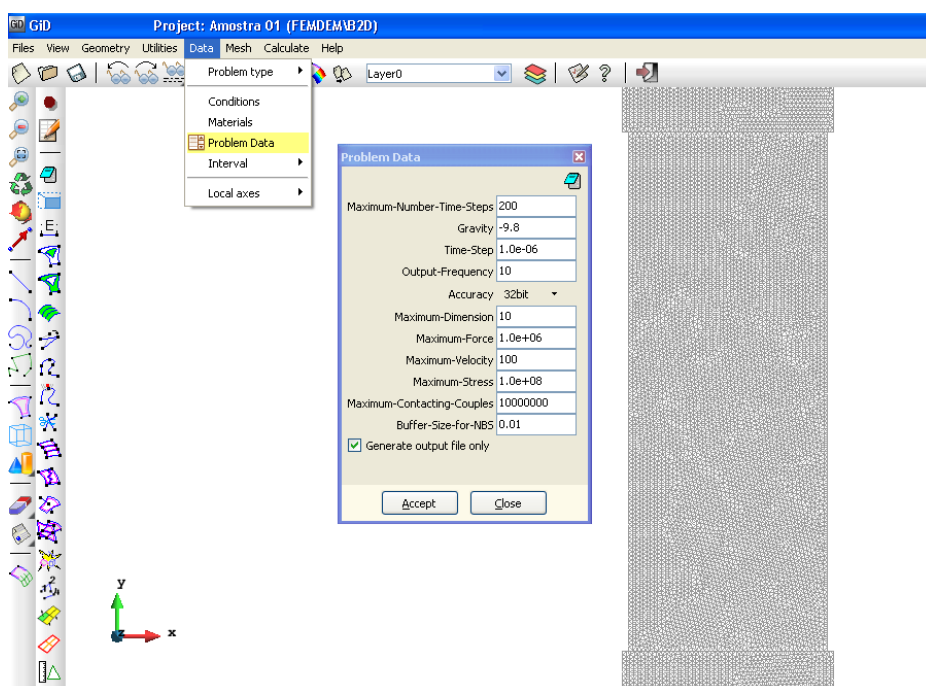


Figura 20 - Ferramenta Problem Data do software GiD.

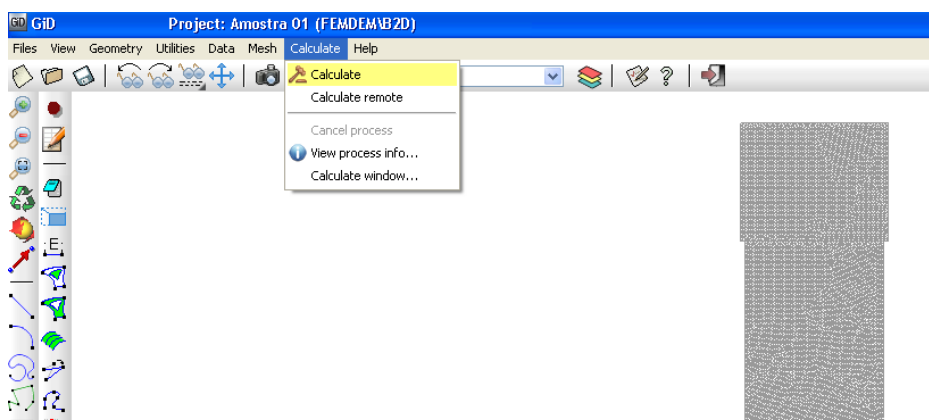


Figura 21 - Ferramenta Calculate do software GiD.

Gerado o arquivo Y de leitura o passo seguinte é a visualização da simulação utilizando o software MayaVi. O arquivo Y criado é aberto e então o MayaVi começa a

calcular o processo e gerar cada arquivo representando um passo do processo, onde o intervalo de passos (Steps) é determinado na ferramenta *Problem Data* (Figura 20). Gerados todos os arquivos, o programa MayaVi abre sua interface automaticamente e então os resultados da simulação do processo, contendo cada imagem de cada *etapa*, podem ser visualizados (Figura 22).

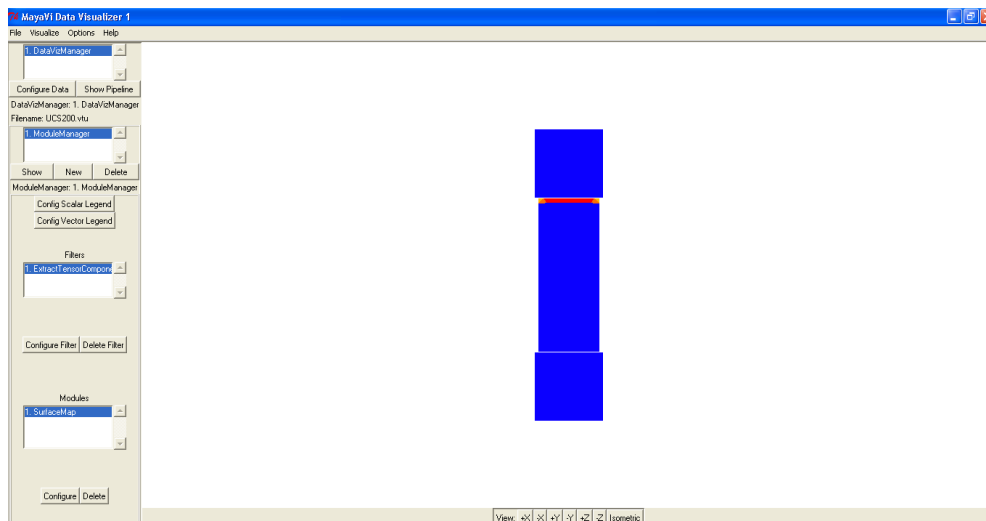


Figura 22 - Interface gráfica do software MayaVi.

Terminado estes procedimentos os resultados adquiridos foram registrados e analisados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Resistência à Compressão

Os valores de resistência à compressão das amostras simuladas foram calculados a partir dos resultados da simulação observados através do software MayaVi utilizando as propriedades para a amostra de rocha representadas na

Tabela 4.

Tabela 4 - Propriedades da Rocha Intrusiva Básica calculadas.

Amostra	λ (10^9)	μ (10^9)	Penalty Number (10^9)	Tensão de Tração (MPa)	Tensão de Cisalhamento (MPa)	Coefficiente de Atrito	Energy Release Rate (MN/m)
1	10.42	19.69	462	8.55	42.77	0.84	2.10E-05
2	15.17	28.67	672.6	10.71	53.56	0.84	1.44E-05
3	13.20	21.53	512.4	7.12	35.62	0.84	1.88E-05
4	11.78	28.02	643.3	11.87	59.36	0.84	1.52E-05
5	8.29	13.30	317.1	5.99	29.93	0.84	3.04E-05
6	15.44	31.36	730.6	11.01	55.05	0.84	1.33E-05
Média	12.38	23.76	556.33	9.21	46.05	0.84	1.74E-05

No entanto, software MayaVi não fornece diretamente o valor da resistência à compressão e também não consegue indicar quando o corpo de amostra rompe. Porém com o resultado mostrado no software é possível observar o comportamento das distribuições das tensões percorrendo a amostra, e através disso identificar quando a amostra rompe durante um ensaio de Compressão Uniaxial (UCS).

Sabendo identificar o comportamento das tensões distribuídas em um corpo UCS quando está a romper, o passo seguinte é determinar o valor de tensão na área do corpo de amostra que caracteriza o seu rompimento. Os valores de tensão podem ser descritos através de uma tabela gerada pelo MayaVi, que relaciona os valores de tensão em Pascal (Pa) com as cores que vão aparecendo dentro dos objetos simulados.

Através da observação de toda a simulação, notou-se que quando as plataformas de aço começam a se movimentar iniciando a compressão da amostra, as cores dos elementos variavam de tons de azul até chegar a tons de coloração verde ou amarela, representando o aumento da tensão nestes elementos.

Essa mudança de cor foi constatada nos outros elementos seguindo a direção da plataforma de aço mais próxima, sendo a plataforma de aço superior em sentido descendente e plataforma de aço inferior em sentido ascendente.

Estes fluxos descendente e ascendente de tensões continuam até formar uma cruz no centro da amostra, o que indica o encontro dos dois “fluxos” de tensões. Neste período, foi apontado como momento em que o corpo UCS rompe.

Sendo assim, para este trabalho, a estrutura considerada indicadora do rompimento da amostra foi a que apresenta uma distribuição com maiores valores de tensão formando uma cruz ao centro da amostra de rocha simulada. Onde nessa cruz seu eixo se encontra ao centro da amostra e suas extremidades próximas à superfície da amostra, como representado pela Figura 23.

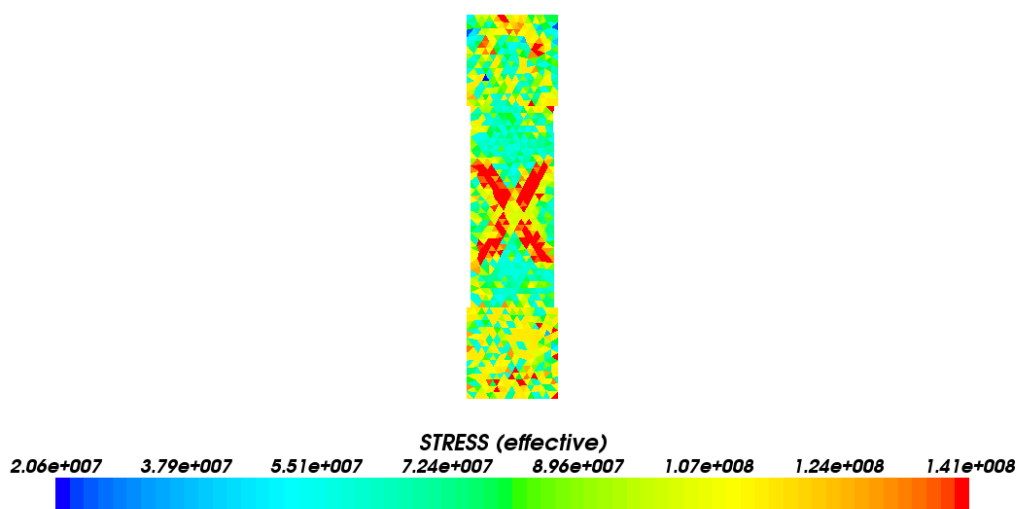


Figura 23 - Exemplo da distribuição de tensões em uma amostra quando ocorre o rompimento (Software MayaVi).

Tendo esta consideração, os valores de resistência à compressão da rocha foram julgados como os valores indicados pelos tons de cores constatados no centro da cruz formada na amostra de rocha. No momento quando a cruz é formada, e no momento anterior à cruz desaparecer, concluindo que neste momento a amostra está rompida.

Assim foram considerados os valores para os dois momentos citados no parágrafo anterior. Contudo a tabela de valores de tensão do software MayaVi não indica o valor preciso para todos os tons de cores existentes, então foi considerado realizar uma interpolação dos valores representativos das faixas de cores que indicavam as cores presentes nos centros das cruzeiras das amostras (Figura 24).

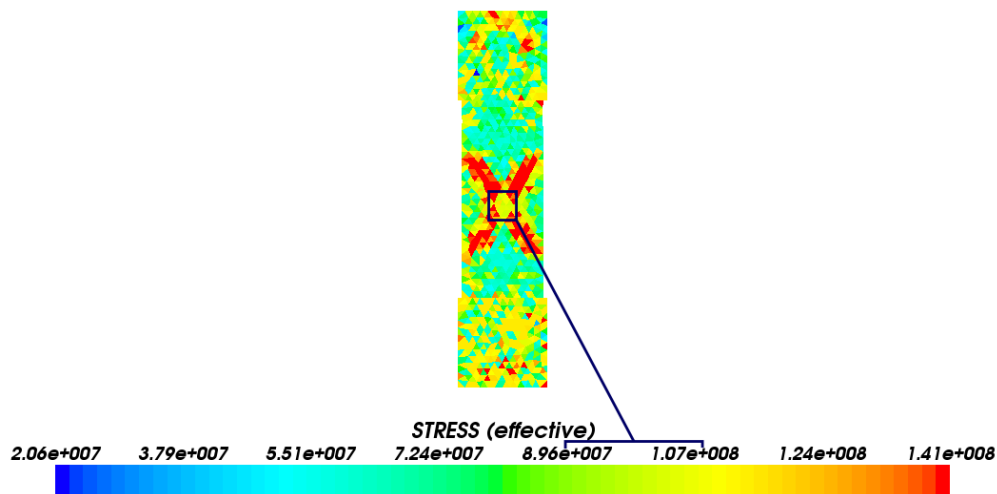


Figura 24 - Faixa utilizada para aplicar a interpolação de valores para determinar o valor de resistência a compressão da rocha (Software MayaVi).

Determinado o método para a identificação dos valores de resistência à compressão da rocha, a Tabela 5 foi formada com os valores de tensão interpolados.

Tabela 5 – Resistências obtidas através do método de interpolação.

Amostra	Primeira Cruz Formada (MPa)	Última Cruz Formada (Mpa)
1	93.65	105.70
2	99.40	103.15
3	94.40	103.50
4	98.70	98.30
5	103.20	99.65
6	95.95	100.70
Média	97.55	101.83

Os valores de resistência na Tabela 5 representam as resistências simuladas para cada uma das seis amostras. Estes valores simulados da Tabela 5 foram comparados com os valores reais de resistência à compressão das amostras de rocha (

Tabela 6).

Tabela 6 - Valores de resistência à compressão de ensaios reais de compressão uniaxial Laboratório de Tecnologia de Rochas do Departamento de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG.

Amostra	Resistencia à compressão (MPa)
1	85.53
2	107.11
3	71.23
4	118.71
5	59.86
6	110.1
Média	92.09

A partir dos dados das tabelas 5 e 6, foi gerado o Gráfico 1 para fazer a comparação entre os valores das resistências simuladas e reais das amostras.

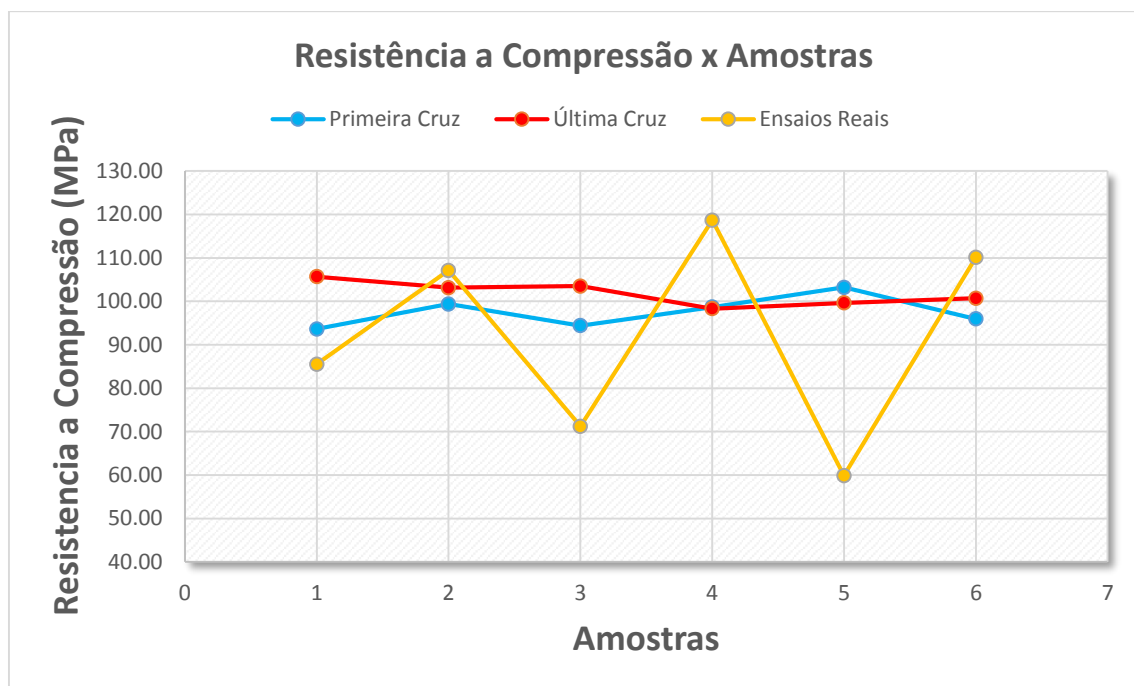


Gráfico 1 - Resistência à Compressão x Número da Amostra.

Como notado, a maioria dos valores simulados não foram próximos dos valores de resistência à compressão da rocha das amostras reais. Sendo a amostra 2 a que obteve um resultado simulado mais próximo ao valor real (107,11 MPa), obtendo valores de

99,40 MPa para primeira cruz formada e 103,15 MPa para a última cruz formada na simulação.

Em seguida foram traçadas as linhas de tendência para os dados de resistência à compressão no Gráfico 1, Primeira Cruz Formada, Última Cruz Formada e Ensaios Reais. Por motivos de comparação com os ensaios reais, foram gerados dois gráficos de tendência, o Gráfico 2 para comparar os dados de resistência à compressão pelo método de análise da primeira cruz formada e o Gráfico 3 para comparar os dados de resistência à compressão pelo método de análise da última cruz formada.

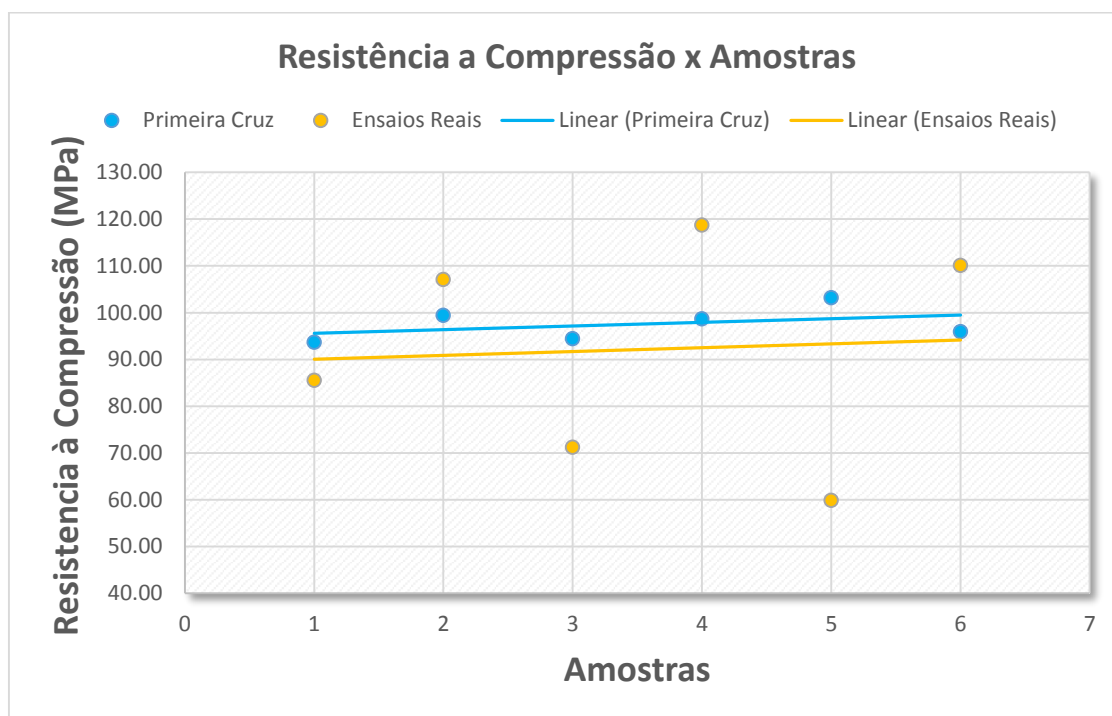


Gráfico 2 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os simulados analisados pelo método da primeira cruz.

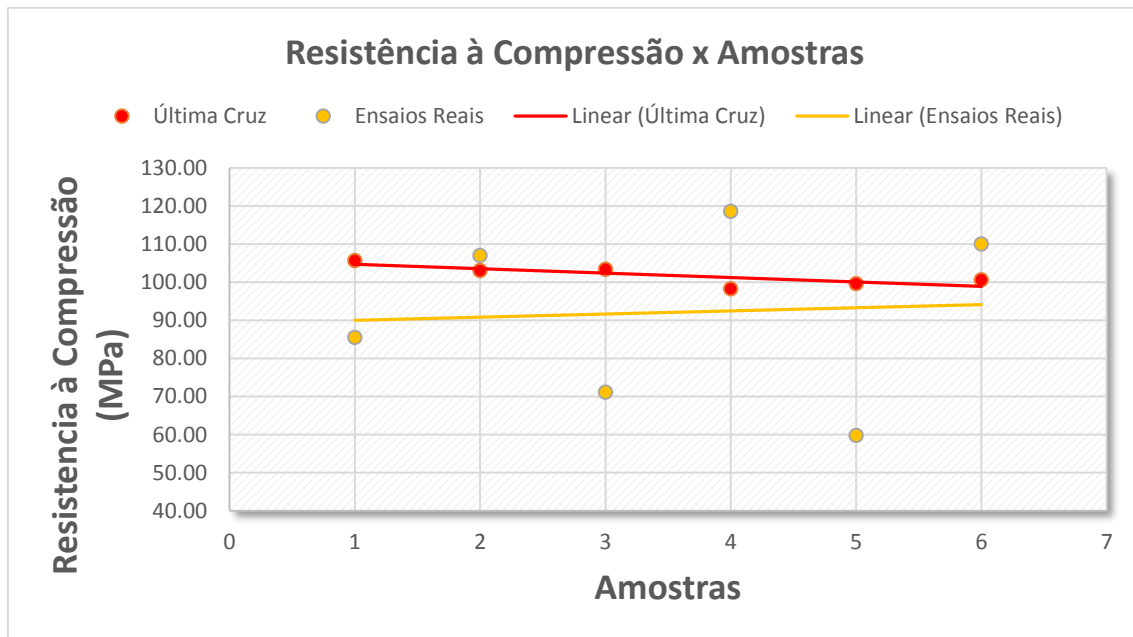


Gráfico 3 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os simulados analisados pelo método da última cruz.

Através das análises dos gráficos de tendência, para ambos os métodos de análise (análise da primeira cruz e análise da última cruz), foi possível observar que, a linha de tendência para o método de análise da primeira cruz apresenta uma mesma tendência da linha com resultados de ensaios reais, pois ambas as linhas crescem aparentando mesma inclinação. Já observando o Gráfico 3, é notado que a linha de tendência gerada pelos dados de análise da última cruz, mostrou um comportamento decrescente que é oposto ao comportamento da linha de tendência dos resultados reais.

Após a análise de tendência para os dois métodos de análise de ruptura simulada, os valores obtidos com os dois métodos foram interpolados para gerar valores mais representativos da simulação (Tabela 7).

Tabela 7 - Resultados de resistência a compressão dos ensaios reais e dos simulados com a interpolação dos valores da primeira cruz com a última cruz.

Amostra	Resistência à compressão (MPa)	Resistência à compressão simulada (Interpolada) (MPa)
1	85.53	99.68
2	107.11	101.28
3	71.23	98.95
4	118.71	98.50
5	59.86	101.43
6	110.10	98.33
Média	92.09	99.69

Com os dados da Tabela 7 foram gerados gráficos para comparação dos resultados simulados e para os resultados reais da resistência à compressão da rocha (Gráfico 4), e para a comparação da linha de tendência (Gráfico 5) do Gráfico 4.

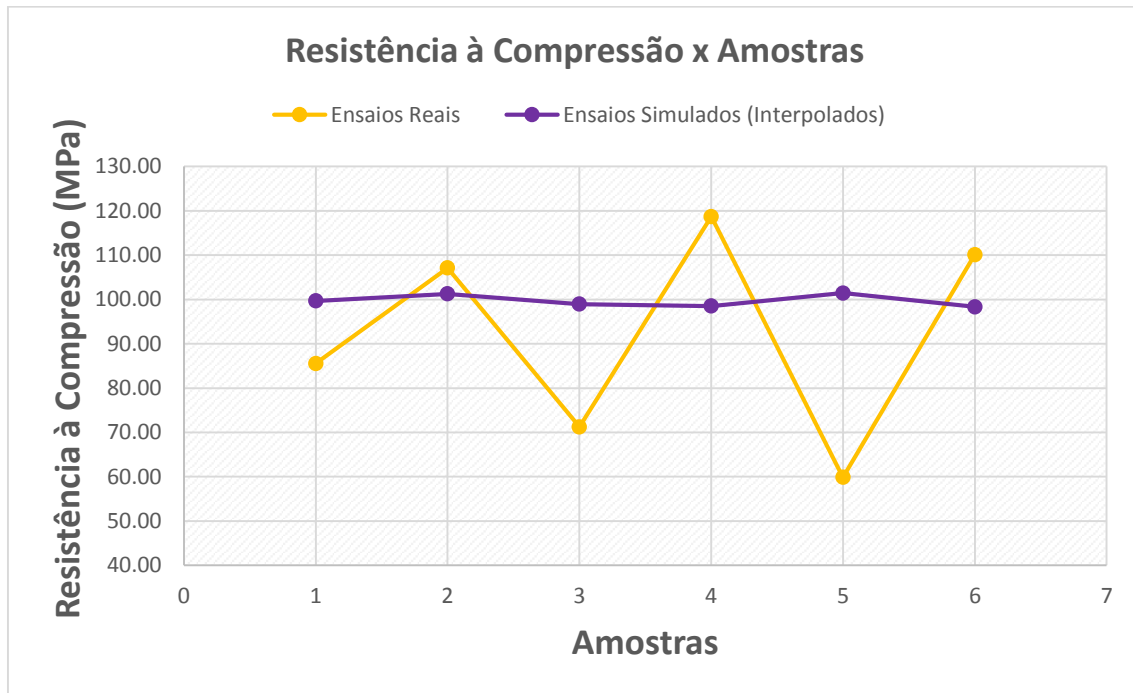


Gráfico 4 - Gráfico para comparação entre os dados reais e os dados simulados interpolados.

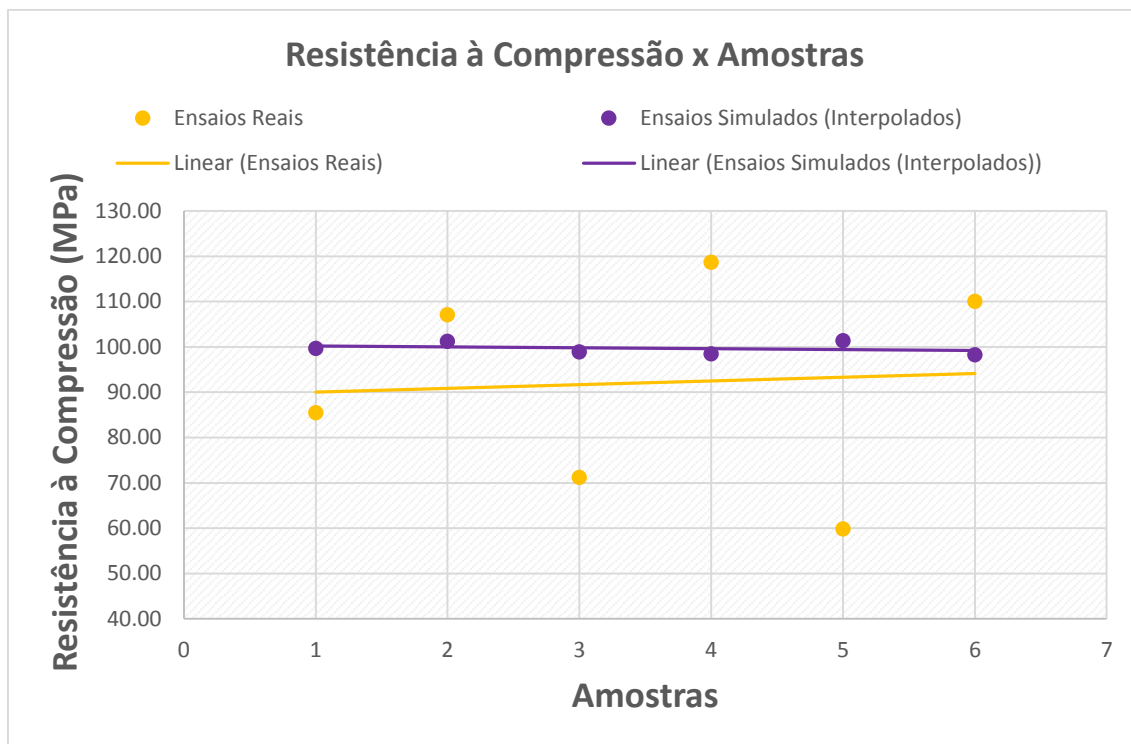


Gráfico 5 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os dados simulados interpolados.

Considerando os gráficos acima, nota-se que a interpolação dos valores da primeira cruz e da última cruz apresentou valores mais próximos entre as amostras simuladas, aumentando a diferença entre os valores simulados e os reais. Devido à aproximação entre valores simulados como citado anteriormente, a linha de tendência dos valores simulados no Gráfico 5 se mostra uma linha com inclinação levemente decrescente. Esses resultados indicaram que esta interpolação não contribuiu para uma menor diferença entre os resultados simulados e os reais.

Para concluir as análises entre os valores de resistência reais e simulados, foram selecionados, entre os valores simulados da primeira e última cruz, os que possuem menor diferença em relação aos valores reais.

Com este intuito, foi gerada a Tabela 8 com os valores das resistências dos ensaios simulados gerados, os quais obtiveram os valores de menor diferença em relação aos valores dos ensaios reais. Para medir essa diferença, a razão entre a resistência simulada e a real foram calculadas para cada amostra e método de análise utilizado, em seguida esta razão foi subtraída por 1 e multiplicada por 100 para adquirir uma relação na forma de porcentagem. Assim os valores simulados que apresentaram

essa relação com valor mais próximo de zero, foram denominados como os valores selecionados.

Tabela 8 - Valores simulados selecionados em comparação aos reais e suas relações (%).

Amostra	Ensaio Real (MPa)	Valores selecionados (MPa)	Relação (%)
1	85.53	93.65	-9.49
2	107.11	103.15	3.70
3	71.23	94.4	-32.53
4	118.71	98.7	16.86
5	59.86	99.65	-66.47
6	110.10	100.7	8.54

Onde os 'valores selecionados' das amostras 1, 3 e 4 são os valores simulados adquiridos pelo método de análise da Primeira Cruz, enquanto os valores das amostras 2, 5 e 6 são valores do método de análise da Última Cruz.

Com os dados da Tabela 8 o gráfico para comparação dos valores foi gerado (Gráfico 6) e junto com ele o Gráfico 7 com as linhas de tendência dos pontos do Gráfico 6.

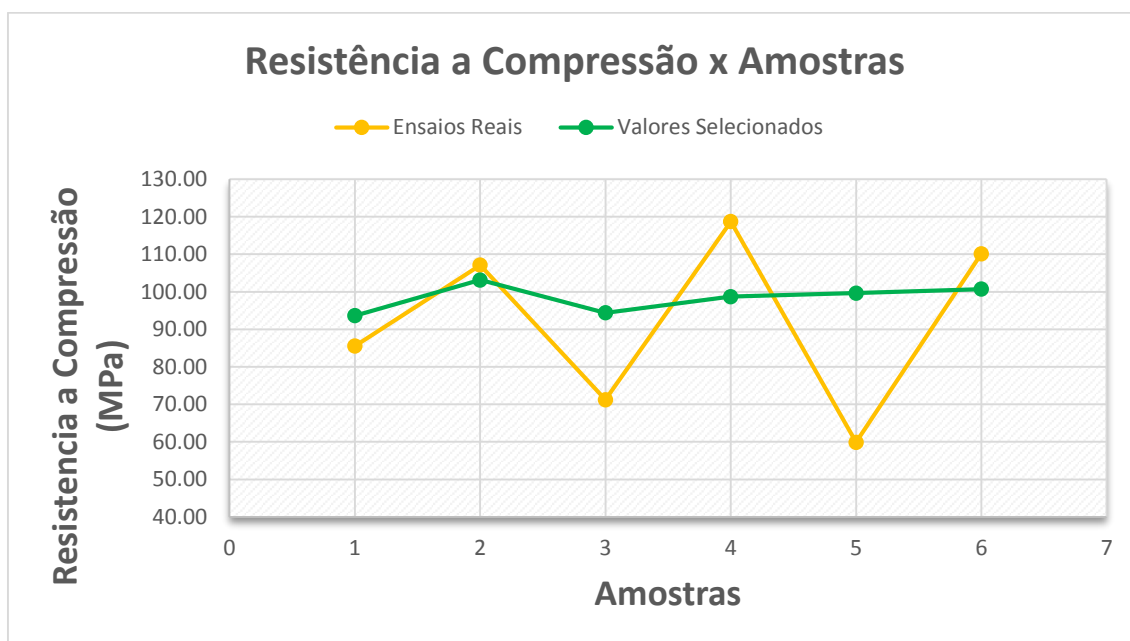


Gráfico 6 - Gráfico para comparação entre os dados reais e os valores mais próximos simulados.

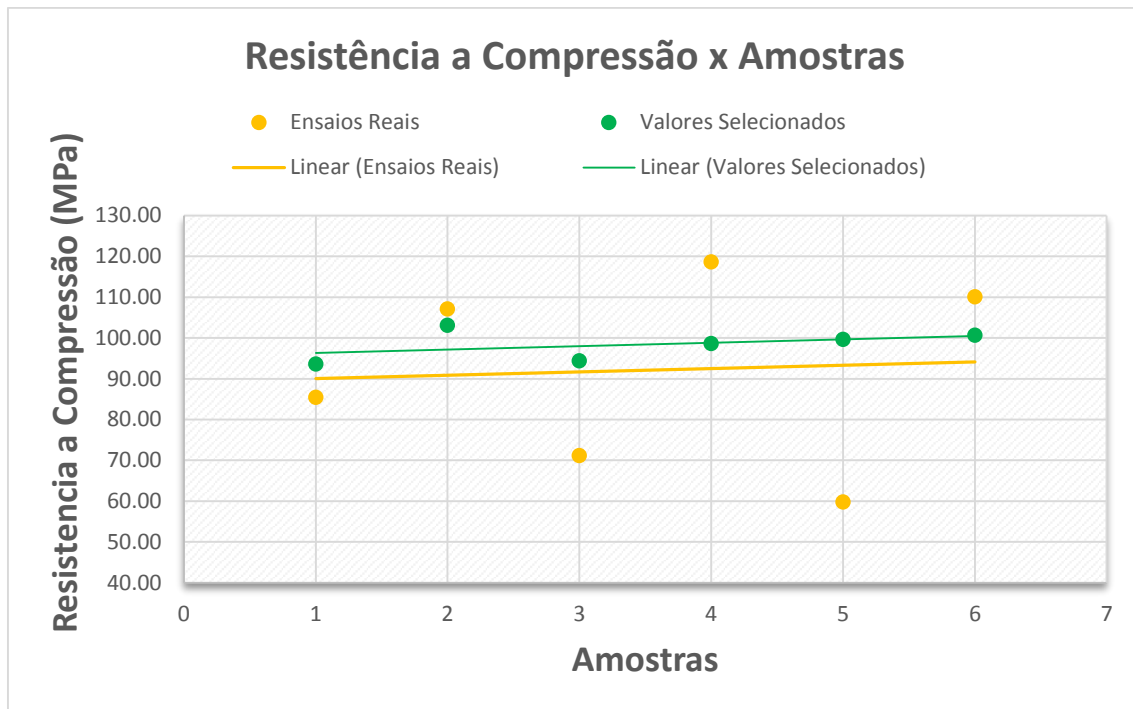


Gráfico 7 - Gráfico de tendência para comparação entre os dados reais e os valores simulados mais próximos.

Quando analisados os gráficos acima, foi notado que a linha de tendência dos valores seleccionados apresentou uma tendência similar com a linha de tendência dos valores de ensaios reais. É uma tendência crescente e de posição muito similar à posição da linha de tendência dos valores da primeira cruz, sendo assim mais um gráfico foi criado contendo a dispersão dos pontos e as linhas de tendência para todos os métodos de análise de ensaios simulados feitos anteriormente (Gráfico 8).

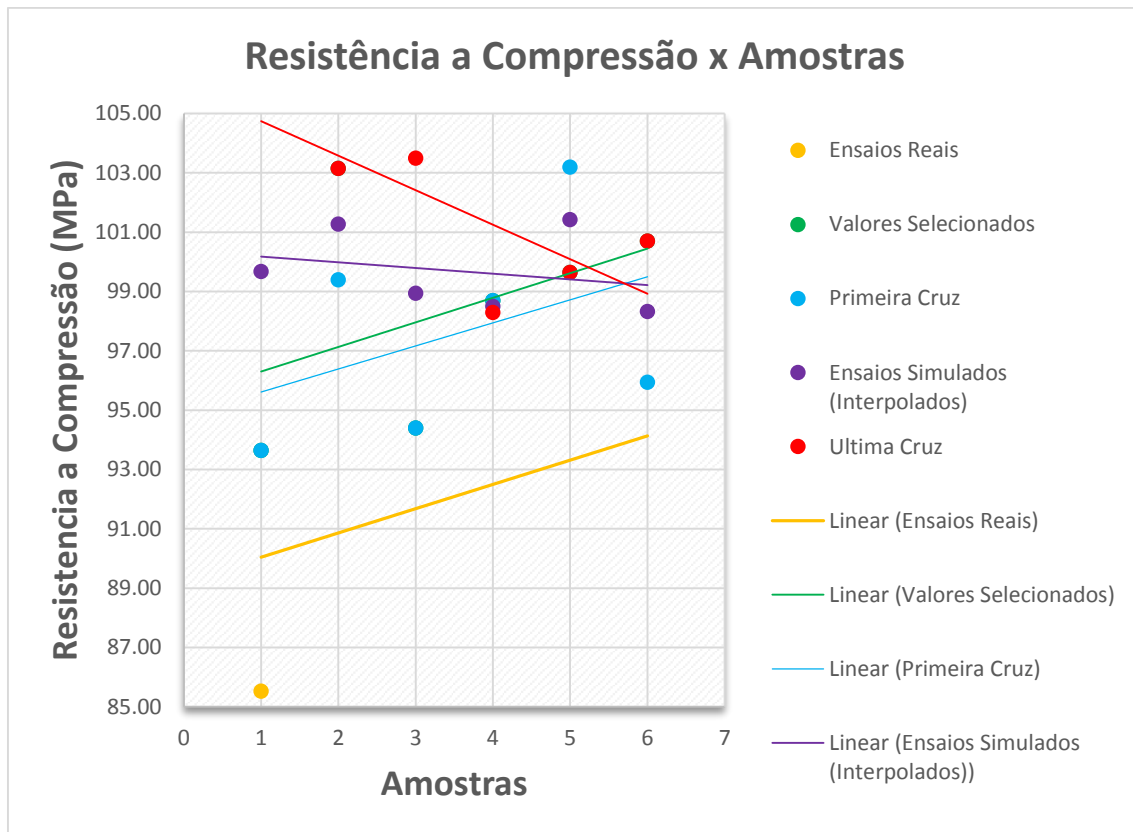


Gráfico 8 - Representação de todas as linhas de tendência para os valores de resistência a compressão dos ensaios reais e ensaios simulados com suas diversas formas de análises abordadas neste trabalho.

Através do gráfico acima ficou visível que, os métodos de Última Cruz e dos Ensaios Simulados (Interpolados) apresentaram uma dispersão de pontos muito distantes dos pontos que representam os valores reais. Suas linhas de tendência estão em direções decrescentes e em posições muito acima da linha de tendência dos Ensaios Reais. Enquanto os métodos de Primeira Cruz e de Valores Selecionados também apresentaram dispersões de pontos muito distantes dos reais, contudo estavam mais próximos dos reais se comparados aos métodos de Última Cruz e Ensaios Simulados (Interpolados). Quanto a suas linhas de tendência, pode-se observar que elas apresentaram inclinação muito similar à linha dos Ensaios Reais.

Essa característica das linhas simuladas se dá pelo fato de que os softwares utilizados para a modelagem são utilizados para modelagens de corpos isotrópicos. Sendo assim, o comportamento de uma amostra de rocha não pode ser simulado de maneira precisa por um software que não seja especializado em modelagem de corpos anisotrópicos.

Apesar da diferença das dispersões dos pontos simulados com os reais, é possível ver que tendência das linhas simuladas para os métodos de Primeira Cruz e Valores Seleccionados consegue representar a tendência da linha dos Ensaios Reais, dando ênfase no método da Primeira Cruz por ter chegado mais próximo da dispersão de pontos dos valores de resistência dos Ensaios Reais. Baseado neste raciocínio é possível descrever o comportamento da rocha com a utilização dos softwares GiD e MayaVi em conjunto.

4.2. Mass Damping Coefficient

Devido à incerteza quantos aos valores da propriedade de *Mass Damping Coefficient* (MDC) a serem utilizados, e da sua interferência no comportamento de uma amostra de rocha simulada através da modelagem FEM-DEM, foram realizados simulações ensaios UCS utilizando valores médios das propriedades da amostra (

Tabela 4). Nestes ensaios foram variados apenas os valores de *Mass Damping Coefficient* para a amostra de rocha intrusiva básica, a variação começou a partir dos valores de *Mass Damping Coefficient* já encontrados no software GiD para os materiais, *Sand* (Areia) e *Microbeads* equivalente a 100000 e decrescendo este valor conforme a Tabela 9.

Tabela 9 - Variação da Resistência à compressão de ensaios simulados em relação a mudança do Mass Damping Coefficient.

MDC	Resistência à Compressão (Simulada)
0	98.30
6250	98.70
12500	99.75
25000	95.90
50000	97.10
100000	97.20

Mediante aos valores da Tabela 9, o Gráfico 9 foi gerado para uma melhor perspectiva da alteração de comportamento da amostra na simulação com a variação do seu MDC.

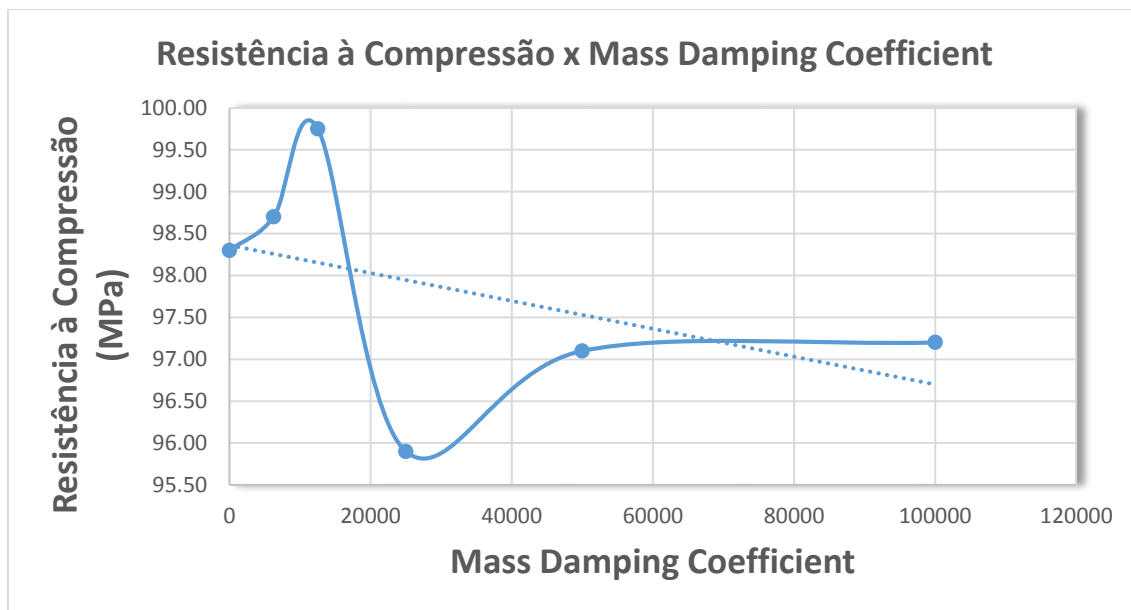


Gráfico 9 - Valores de resistência a compressão de ensaios UCS simulados em função dos valores de Mass Damping Coefficient.

Analisando o comportamento dos resultados no Gráfico 9, é possível considerar que quanto maior o valor de *Mass Damping Coefficient* de uma rocha, menor será a sua resistência à compressão. Isso pode ser relacionado ao fato de que os materiais de menor coesão presentes no GiD (*Sand* e *Microbeads*) possuem maiores valores de MDC e por terem baixa coesão, possuem menor resistência à compressão. Enquanto os materiais no GiD de maior coesão (*Concrete* e *Granite*) possuem valor de MDC equivalente a zero.

5. CONCLUSÕES

Em virtude do que foi mencionado neste estudo, os seguintes fatos foram observados:

- ✓ O software utilizado para a modelagem (GiD) é um software que se restringe à modelagem de materiais isotrópicos, não sendo o ideal para simular uma amostra de corpo rochoso.

- ✓ As propriedades do material Aço foram baseadas em valores tabelados, não podendo considerar como uma maneira realista de representar as plataformas.
- ✓ As velocidades utilizadas nas plataformas que comprimiram a amostra simulada, foram muito altas em comparação ao que se pode observar em ensaios UCS reais.

Através destes fatos pode-se concluir que os resultados obtidos com a simulação representou de maneira pouco precisa os valores de resistência à compressão uniaxial do material, contudo os resultados foram coerentes ao comportamento de uma amostra de rocha durante um ensaio de compressão uniaxial. Tendo em vista os aspectos notados durante a simulação, o fluxo das tensões no corpo da amostra foi simulado de forma realista.

Para a análise do efeito da propriedade *Mass Damping Coefficient*, foi deduzido que esta propriedade está relacionada a coesão do material. Sendo assim valores altos são aplicados para materiais de baixa coesão, como a areia e valores próximos ou iguais a zero para materiais mais coesos como o concreto.

Conclui-se também, que se tratando de um material rochoso, é necessário a realização de estudos mais detalhados. É necessário utilizar softwares que tenham a capacidade de simular bem as características de uma rocha, tais como a variedade das propriedades dos minerais encontrados na rocha, a maneira como os minerais presentes se arranjam dentro da rocha e as descontinuidades pré-existentes na rocha. Além de conseguir simular as condições reais de um ensaio de mecânica de rochas, tal como a velocidade que as plataformas se movem.

Por fim, pôde-se concluir que a utilização da modelagem numérica por Elementos Finitos Discretos (Método FEM-DEM) para uma simulação real de ruptura de um corpo UCS se mostrou promissora. Porém, a utilização do software GiD em conjunto com o software MayaVi não conseguiu atingir valores de resistência à compressão uniaxial reais dos ensaios UCS, não sendo aconselhável a utilização para adquirir informações para tomada de decisões em uma operação de mineração.

6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Realizar simulações com condições realistas utilizando o software GiD em conjunto com o MayaVi.

Utilizar softwares com capacidade de representar de maneira fiel as características e a distribuição mineralógica de uma rocha.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARNARD, P. R. (1964). **Researches into the complete stress-strain curve for concrete**, *Mag. Concr. Res.*, 16, 203-10.
- BRADY B.H.G., BROWN E.T. (2004). **Rock Mechanics for Underground Mining**. 3. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 648 p.
- CHAU, K. T. (1997). **Young's modulus interpreted from compression tests with end friction**, *J. Eng. Mec.*, 123, 1-7.
- EVANS R, MARATHE M (1968). **Micro-cracking and stress-strain curves for concrete in tension**. *Mater Struct* 1:61-64
- GOODMAN R.E., TAYLOR R.L., BRAKKE T.L. (1968). **A model for the mechanics of jointed rock**. *J Soil Mech Div. ASCE* 94, SM3, 637-59 p.
- JAEGER J. C., COOK N.G.W., ZIMMERMAN R.W. (2007). **Fundamentals of Rock Mechanics**. 4. ed. USA: Malden MA, 2007. 475 p.
- JING L. (2003). **A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering**. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 40, 283-353 p.
- MAHABADI O.K., COTTRELL B.E., GRASSELLI G. (2010). **An example of realistic modelling of rock dynamics problems: FEM/DEM simulation of dynamic Brazilian test on barre granite**.
- MAHABADI O.K. (2012). **FEM/DEM Tutorial**. Geomechanics Group at University of Toronto, Canada. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Czzm9kFSB0I>.
- MUNJIZA A (2004). **The combined finite-discrete element method**. Wiley, Chichester, West Sussex, Hoboken NJ 333 p.
- MUNJIZA A, ANDREWS KRF, WHITE JK (1999). **Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element analysis**. *Int J Numer Methods Eng* 44:41-57.

MURRELL S. A. (1965). **The effect of triaxial stress systems on strength of rocks at atmospheric temperatures.** *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 10, 231-81.

RAMACHANDRAN P. (2001). **MayaVi: A Free Tool for CFD Data Visualization.** Dept. Aerospace Engg. IIT-Madras, Chennai, 8 p.

SHANMUKHA. (2016). **Strength Parameters of Soil**, *knowledge4civil*. Acessado em: <https://knowledge4civil.wordpress.com/2016/12/12/strength-parameters-of-soil/>